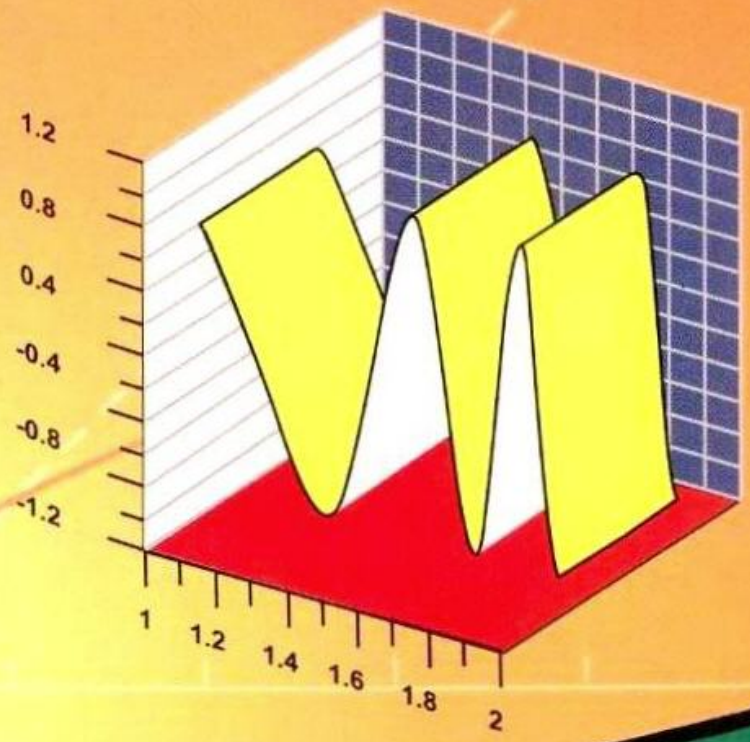
VŨ NINH GIANG



HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

GIẢI TÍCH 11

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ĐH QG HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA

VŨ NINH GIANG

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

GIẢI TÍCH 11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Chịu trách nhiệm nội dung & bản quyền
TRUNG TÂM VĂN HOÁ TRÀNG AN

Biên tập Minh Hải
Trình bày bìa Thu Hương

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP GIẢI TÍCH 11
Mã số: 1L-168 ĐH2007

In 2000 cuốn, khổ 16x24cm, tại Côngty TNHH Nhà nước
một thành viên Khảo sát & xây dựng.
Số xuất bản: 533-2007/CXB/04-77/ĐHQGHN, ngày 10/7/2007
Quyết định xuất bản số: 383 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài tập

1. Hãy xác định những giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số y = tanx:

a) Nhận giá trị bằng 0;

b) Nhận giá trị bằng 1;

c) Nhận giá trị dương;

d) Nhận giá trị âm.

2. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$;

b) $y=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;

c) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

d) $y=\cot an\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

3. Dựa vào đồ thị của hàm số y = sinx, hãy vẽ đồ thị của hàm số y = | sinx |.

4. Chứng minh rằng sin2(x + kπ) = sin 2x với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị hàm số y = sin 2x.

5. Dựa vào đồ thị hàm số y = cosx, tìm các giá trị của x để $\cos x=\frac{1}{2}$.

6. Dựa trên đồ thị hàm số y = sinx, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

7. Dựa trên đồ thị của hàm số y = cosx, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị âm.

8. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số: a) $y=2\sqrt{\cos x}+1$; b) y= 3 − 2sinx.

9*.[1] Chứng minh rằng với mọi x ta đều có: $\left|\frac{\cos 3x+a\sin 3x+1}{\cos 3x+2}\right|\le\frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}$.

10. Chứng minh rằng trong mọi Δ ABC, ta luôn có:

$$0 < \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A < 13.$$

(Trích đề thi vào ĐH Ngoại thương - D, 1997).

---

(1) Từ bài tập có dấu (*) trở đi là bài tập bổ sung

Hướng dẫn giải

1. Căn cứ vào đồ thị hàm số y = tanx trên đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta tìm được y = tanx.

a) tanx = 0 tại $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$; b) tanx = 1 tại $x \in \left\{\frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$;

c) tanx > 0 khi $x \in \left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

d) tanx < 0 khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

2. a) Hàm số xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases}(1+\cos x)(1-\cos x) \geq 0 \\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 \leq \cos x \leq 1 \\ \cos x \neq 0\end{cases}$.

Vậy hàm số xác định với mọi x trừ $x = k2\pi$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Hàm số xác định khi $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi$

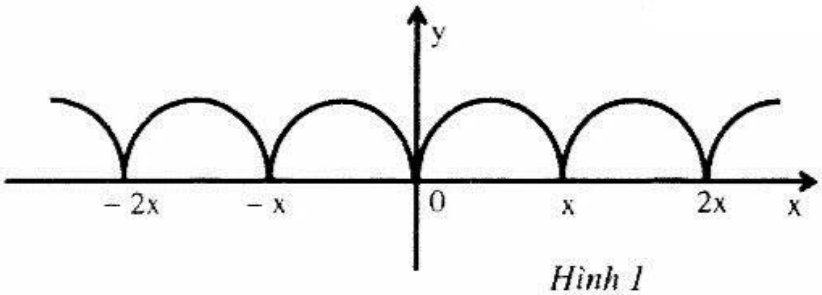
$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Hàm số xác định khi

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. $y = |\sin x| = \begin{cases}\sin x & \text{với} \quad \sin x \geq 6 \\ -\sin x & \text{với} \quad \sin x < 0\end{cases}$

Như vậy muốn vẽ đồ thị y = | sinx | ta vẽ đồ thị y = sinx, rồi giữ lại phần đồ thị với sinx ≥ 0, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị với sinx < 0 qua trục hoành. Đồ thị là: (hình 1)

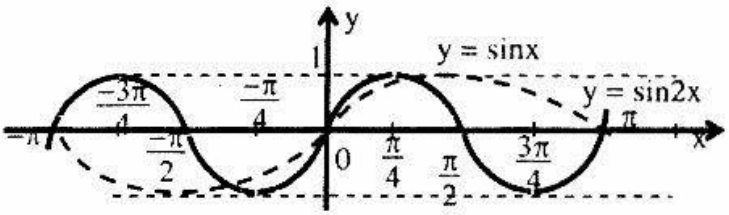


Hình 1

4. Rõ ràng $\sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + k2\pi) = \sin 2x$ ($k \in \mathbb{Z}$). Không khó khăn lắm ta chứng minh được hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

$y = f(x) = \sin 2x$;

$f(-x) = \sin(-2x) = \sin 2x = -f(x)$ nên $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ. Nên từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, ta có đồ thị hàm số $y = \sin 2x$ (hình 2).



Hình 2

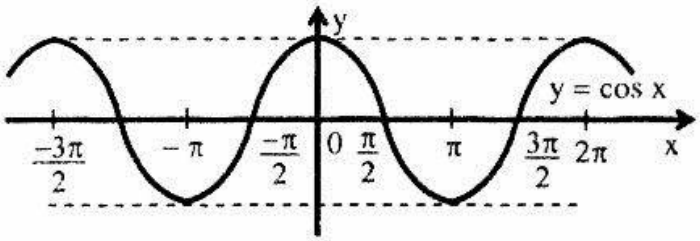
5. $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$ (cắt đồ thị hàm số $y = \cos x$ bởi đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ thì hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$).

6. Dựa vào (hình 2) $y = \sin x > 0$ thì x thuộc các khoảng sau $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ là hình 3.

Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị âm thì :

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right).$$



Hình 3

8. a) $0 \le \cos x \le 1 \Rightarrow y \le 3$.

Vậy GTLN (*) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1 = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow y \le 5$.

(*) GTLN : Giá trị lớn nhất

Vậy GTLN y = 3 – 2sinx = 5 khi sinx = –1 $\Leftrightarrow$ $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Hàm số $y = \frac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$ xác định với mọi x hay D = $\mathbb{R}$.

Bài toán dẫn đến tìm miền giá trị của y.

Ta có $y(\cos 3x + 2) = \cos 3x + a\sin 3x + 1 \Leftrightarrow (1 - y)\cos 3x + a\sin 3x = 2y - 1$.

Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức $(ab + cd)^2 \le (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$.

Áp dụng bất đẳng thức này ta có: $(2y - 1)^2 \le [(1 - y)^2 + a^2][\cos^2 3x + \sin^2 3x]$

$$(2y - 1)^2 \le (1 - y)^2 + a^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y - a^2 \le 0$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \le y \le \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

10. Chắc chắn có : $\sin A(1 - \sin B) + \sin B(1 - \sin C) + \sin C(1 - \sin A) > 0$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A > 0.$$

Ta cũng có $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \ge 0 \Leftrightarrow$

$$1 - \sin A - \sin B - \sin C + \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A - \sin A\sin B\sin C \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin A\sin B\sin C \ge \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A < 1, \text{ đpcm.}$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài tập

1. Giải các phương trình:

a) $\sin(x+2)=\frac{1}{3}$; b) $\sin 3x = 1$;

c) $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$; d) $\sin(2x+20^0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số y = sin3x và y = sinx bằng nhau?

3. Giải các phương trình: a) $\cos x(x-1)=\frac{2}{3}$; b) $\cos 3x = \cos 12^0$;

c) $\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; d) $\cos^2 2x=\frac{1}{4}$.

4. Giải phương trình: $\frac{2\cos x}{1-\sin 2x}=0$.

5. Giải các phương trình a) $\tan(x-15^0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}$;

c) $\cos 2x \tan x = 0$; d) $\sin 3x \cot x = 0$.

6. Với các giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ và y = tan2x bằng nhau?

7. Giải các phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác:

a) $\sin 3x - \cos 5x = 0$; b) $\tan 3x \tan x = 1$.

8*. Giải các phương trình:

a) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$; b) $\sin^2\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{4}+\pi\right)$;

c) $1 + \sin x \cos 3x + \sin x + \cos 3x = 0$; d) $\sin^3 x(1-\cot x)-\cos^3 x(1-\tan x)=0$.

Hướng dẫn giải

1. a) $\sin(x+2)=\frac{1}{3}$. Phương trình có nghiệm là:

$$x=-2+\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi;$$

$$x=-2+\pi-\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) $\sin3x=1$, vì $1=\sin\frac{\pi}{2}$, nên $\sin3x=1\Leftrightarrow \sin3x=\sin\frac{\pi}{2}$.

Nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3};k\in\mathbb{Z}$.

c) $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\frac{3\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

d) $\sin(2x+20^0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin(2x+20^0)=\sin(-60^0)$. Vậy ta có:

$$\begin{bmatrix}2x+20^0=-60^0+k360^0\\2x+20^0=180^0+60^0+k360^0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-40^0+k180^0\\x=110^0+k180^0\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}).$$

2. $\sin3x=\sin x$. Ta có $\begin{bmatrix}3x=x+k2\pi\\3x=\pi-x+k2\pi\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$.

3. a) $\cos(x-1)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x-1=\pm\arccos\frac{2}{3}+k2\pi$

$$\Leftrightarrow x=1\pm\arccos\frac{2}{3}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\cos3x=\cos12^0\Leftrightarrow 3x=\pm12^0+k360^0\Leftrightarrow x=\pm4^0+k120^0,k\in\mathbb{Z}$.

c) $\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$;

$$\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=\frac{11\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3}\\x=\frac{-5\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3}\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \pm\frac{1}{2}$;

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Điều kiện của phương trình $1 - \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Với điều kiện này: $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (\text{loại}) \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện của phương trình, phương trình có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

5. a) Điều kiện của phương trình $\cos(x - 15^0) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \cos(x - 15^0) \neq \cos 90^0 \Leftrightarrow x - 15^0 \neq \pm 90^0 + k360^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 105^0 + k360^0 \\ x \neq -75^0 + k360^0 \end{array}\right.$$

$$\tan(x - 15^0) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^0 \Leftrightarrow x = 45^0 + k180^0, (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Điều kiện của phương trình: $\sin(3x - 1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin(3x - 1) \neq \sin 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 \neq 0 + k2\pi \\ 3x - 1 \neq \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi+1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\cot(3x - 1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(3x - 1) = \cot\frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\cos 2x \tan x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \tan x = 0 \end{array}\right.$ (Điều kiện của phương trình $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

• $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;

• $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\sin 3x \cot x = 0$. Điều kiện của phương trình $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = l\frac{\pi}{3} \\ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu với điều kiện của phương trình $x \neq k\pi$, vậy họ nghiệm thứ nhất $l \neq 3, 6, 9, ...$

Ta tách họ nghiệm $x = l\frac{\pi}{3}$ thành $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \ x = \frac{\pi}{2} + m\pi \ (k, m \in \mathbb{Z}).$$

6. $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ (1)

Điều kiện của phương trình: $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$;

Đối chiếu với điều kiện của phương trình, phương trình có nghiệm là:

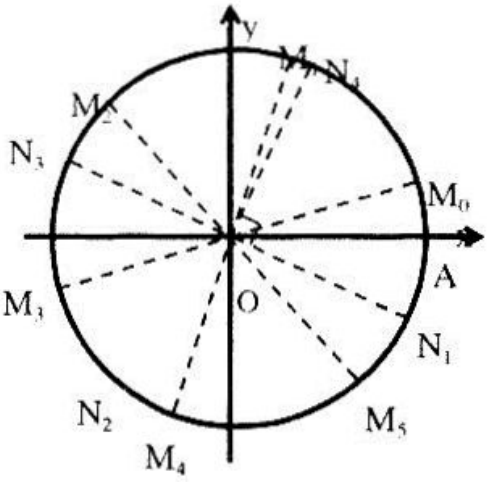
$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + l\pi, \ (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: Muốn đối chiếu nghiệm với điều kiện của phương trình ta phải biểu diễn chúng trên đường tròn lượng giác để loại đi những cung nghiệm không thoả mãn điều kiện của phương trình.

7. a) $\sin 3x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = \sin 3x$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 5x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$



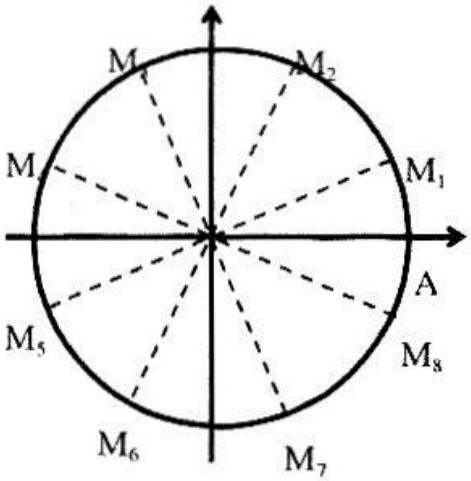
Hình 4

Biểu diễn họ nghiệm thứ nhất trên đường tròn lượng giác là 6 cung lượng giác: $\overset{\curvearrowright}{AM_0}$, $\overset{\curvearrowright}{AM_1}, \overset{\curvearrowright}{AM_2}, \overset{\curvearrowright}{AM_3}, \overset{\curvearrowright}{AM_4}, \overset{\curvearrowright}{AM_5}$.

Biểu diễn họ nghiệm thứ hai trên đường tròn lượng giác là 4 cung lượng giác: $\overset{\curvearrowright}{AN_1}, \overset{\curvearrowright}{AN_2}, \overset{\curvearrowright}{AN_3}, \overset{\curvearrowright}{AN_4}$.

b) tan3x tanx = 1. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3} \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$$



Hình 5

$$\tan 3x \tan x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

cos3x cosx – sin3xsinx = 0

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác ta được 8 cung lượng giác:

$$\overset{\curvearrowright}{AM_1}, \overset{\curvearrowright}{AM_2}, \overset{\curvearrowright}{AM_3}, \overset{\curvearrowright}{AM_4}, \overset{\curvearrowright}{AM_5}, \overset{\curvearrowright}{AM_6}, \overset{\curvearrowright}{AM_7}, \overset{\curvearrowright}{AM_8}.$$

8. a) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 - \cos^2 3x \Leftrightarrow \sin^2 2x = \sin^2 3x \Leftrightarrow \sin 2x = \pm \sin 3x$

$$\bullet\ \sin 2x = \sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = 3x + k2\pi & \Leftrightarrow x = l2\pi \quad (l = -k \in \mathbb{Z}) \\ 2x = \pi - 3x + k2\pi & \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{5}+k\dfrac{2\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$\sin 2x = -\sin 3x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-3x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -3x + k2\pi \\ 2x = \pi + 3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{2\pi}{5} \\ x = -\pi + l2\pi \end{array}\right. \quad (l = -k \in \mathbb{Z})$$

Biểu diễn các họ nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được nghiệm của phương trình là: $x = k\dfrac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Làm tương tự như câu a).

c) $1 + \sin x \cos 3x + \sin x + \cos 3x = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x + 1)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x + 1 = 0 \\ \sin x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

• $\cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -1$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

• $\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

d) $\sin^3 x(1 - \cot x) - \cos^3 x(1 - \tan x) = 0.$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$\sin^3 x\frac{\sin x - \cos x}{\sin x} - \cos^3 x\frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (do } \cos x \neq 0).$$

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

Bài tập

1. Giải phương trình: $\sin^2 x - \sin x = 0$.

2. Giải các phương trình: a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$.

3. Giải các phương trình: a) $\sin^2 \frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$; b) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$;

c) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$; d) $\tan x + 2\cot x + 1 = 0$.

4. Giải các phương trình:

a) $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$; b) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$; d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$.

5. Giải các phương trình:

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$; b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$; c) $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$;

d) $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$; e) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{6}$.

6. Giải các phương trình sau:

a) $\tan(2x + 1) + \tan(3x - 1) = 1$; b) $\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

7*. Giải các phương trình sau:

a) $8\cos^2 x + \cos x = 5$; b) $4\sin x - 3\cos x = 2$;

c) $(4\sin x - 5\cos x)^2 - 13(4\sin x - 5\cos x) + 42 = 0$;

d) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$; e) $\cot x - \tan x = \sin x + \cos x$;

h) $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$; (Trích đề thi HV Ngân hàng – 2000).

8. Cho phương trình $\cos^3 x - \sin^3 x = m$ (1)

1) Giải phương trình (1) khi $m = -1$;

2) Tìm m sao cho phương trình (1) có đúng hai nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$

(Trích đề thi vào ĐHQG TP Hồ Chí Minh – A, 2000).

9. Giải phương trình:

1) $4\cos^2 x + \tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$;

2) $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\tan x + \cot x)$.

(Trích đề thi vào ĐHBK Hà Nội – D, 2000).

10. Giải phương trình: $\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$.

(Trích đề thi vào ĐH - A, 2006).

Hướng dẫn giải

1. $\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x - 1 = 0\end{array}\right.$

• $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

• $\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. a) Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$, ta có phương trình :

$2t^2 - 3t + 1 = 0$, có $a + b + c = 2 - 3 + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$ và $t = \frac{1}{2}$ (đều thoả mãn điều kiện).

• Với $t = 1$, ta có: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $t = \frac{1}{2}$, ta có : $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(1 + \sqrt{2}\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ 1+\sqrt{2}\cos 2x = 0\end{array}\right.$ (chú ý sử dụng công thức: sin2a = 2sinacosa đã học ở lớp 10).

• $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

• $1+\sqrt{2}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z};$

3. a) $\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\cos\dfrac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2\dfrac{x}{2} - 2\cos\dfrac{x}{2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2\dfrac{x}{2} + 2\cos\dfrac{x}{2} - 3 = 0$. Đặt $t = \cos\dfrac{x}{2}, |t| \le 1.$

Ta có phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1\\ t = -3 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

Với t = 1, ta có $\cos\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) Phương pháp giải bài 3 là sử dụng $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (đã học ở lớp 10) sau đó đặt t = sinx hay t = cosx, với $|t| \le 1$ và đưa phương trình lượng giác về phương trình bậc hai đối với t, tìm t (chỉ nhận t thoả mãn $|t| \le 1$) sau đó tìm x.

Đs : $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

$x = \arcsin\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k2\pi; x = \pi - \arcsin\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k2\pi.$

c) Điều kiện $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Đặt tanx = t, ta có phương trình : $2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -1\\ t = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\tan x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right) + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$

d) Điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Phương trình vô nghiệm.

4. Phương pháp giải bài tập 4:

• Trước hết nếu thấy cosx = 0 ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) thoả mãn phương trình thì $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình.

• Nếu cosx = 0, không thoả mãn phương trình tức là $\cos x \neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được phương trình bậc hai đối với tanx và ta dễ dàng giải phương trình này..

a) $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. Rõ ràng $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được phương trình: $2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$

• $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

• $\tan x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Làm tương tự như a) với chú ý $\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}$.

Đs : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(3) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) *Đs :* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-5) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos x\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \text{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Phương trình của bài 5 là phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx, phương trình này có dạng : $a\sin x + b\cos x = c$ (1) ; $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0, b \neq 0$.

Có nhiều cách giải loại phương trình này, xin đưa ra một cách giải: chia cả hai vế của phương trình (1) cho a rồi đặt $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ ta có:

$$\sin x + \tan\alpha\cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha \text{ . (Đây là phương trình lượng giác cơ bản)}$$

Muốn (1) có nghiệm thì : $c^2 \leq a^2 + b^2$.

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$. Đặt $\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

$$\cos x\cos\alpha - \sin x\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi; \qquad x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5 \Leftrightarrow \sin 3x - \frac{4}{3}\cos 3x = \frac{5}{3}$.

Đặt $\tan\alpha = \frac{4}{3}$. Ta có phương trình $\sin 3x\cos\alpha - \sin\alpha\cos 3x = \frac{5}{3}\cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \sin(3x-\alpha) = \frac{5}{3}\cos\alpha \ (*)$$

Ta đã biết $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha + 1} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{\frac{16}{9} + 1}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$, thay vào (*), ta có:

$$\sin(3x-\alpha) = 1 \Leftrightarrow 3x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi + 2\alpha}{6} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Học sinh tự làm.

d) Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\cos 2x + \frac{12}{5}\sin 2x - \frac{13}{5} = 0.$$

Đặt $\tan\alpha = \frac{12}{5}$ ta có phương trình: $\cos 2x\cos\alpha + \sin 2x\sin\alpha = \frac{13}{5}\cos\alpha$

$$\cos(2x-\alpha) = \frac{13}{5}\frac{5}{13} = 1 \Leftrightarrow 2x - \alpha = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\frac{\pi}{2}.$$

e) Học sinh tự làm.

6. Học sinh tự làm.

7. a), b) Học sinh tự làm.

c) Đặt $(4\sin x - 5\cos x) = t$ với $t^2 \le 4^2 + 5^2 = 41$ để phương trình có nghiệm.

Có phương trình ẩn t: $t^2 - 13t + 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = 7 \ (\text{loại}) \end{array}\right.$

Với t = 6, ta có phương trình: $4\sin x - 5\cos x = 6 \Leftrightarrow \sin x - \frac{5}{4}\cos x = \frac{6}{5}$.

Đặt $\tan\alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, ta có phương trình tương đương:

$$\sin x\cos\alpha - \sin\alpha\cos x = \frac{5}{6}\frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-\alpha) = \frac{10}{3\sqrt{41}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \arcsin\frac{10}{3\sqrt{41}} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\frac{10}{3\sqrt{41}} + \alpha + k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

d) $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho, nên $\cos x \ne 0$. Chia cả hai vế của phương trình cho cosx, ta được phương trình tương đương :

$$3\tan^2 x - 4\tan + 2 = \frac{1+\tan^2 x}{2} \Leftrightarrow 5\tan^2 x - 8\tan x + 3 = 0.$$

Đặt tanx = t, ta có phương trình $5t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

• Với t = 1, ta có tanx = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$;

• Với $t = \frac{3}{5}$, ta có $\tan x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{3}{5} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

e) Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$. Có phương trình tương đương:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - (\sin x + \cos x)\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = -\sin x & (1) \\ \cos x - \sin x - \sin x \cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow$ cotx = −1 (chắc chắn sinx ≠ 0) $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ (k ∈ ℤ).

Giải (2): đặt cosx − sinx = t với $|t| \leq \sqrt{2}$ vì theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có: $(\cos x - \sin x)^2 \leq (1^2 + 1^2)(\cos^2 x + \sin^2 x) \Leftrightarrow t^2 \leq 2$ (hoặc biến đổi ta cũng có điều này).

Vì cosx − sinx = t $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 = t^2$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin x \cos x = t^2 \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

(2) $\Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \cos x - \sin x = \sqrt{2} - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

h) $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$ (1) (điều kiện $\sin x \neq 0$; $x \neq k\pi$)

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x\cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x \sin x = 4\sin^2 x\cos x - \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = \cos x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)[\sin x - \cos x(2\sin x + 1)] = 0$

• $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi;\ (k \in \mathbb{Z});$

• $\sin x - 2\cos x\sin x - \cos x = 0.$

Đặt $\sin x - \cos x = t \Rightarrow -2\cos x\sin x = t^2 - 1$ ($|t| \leq \sqrt{2}$)

Ta có phương trình: $t^2 + t - 1 = 0$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy ta có $\sin x - \cos x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

8. (1) $\Leftrightarrow$ $(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x\sin x) = m.$

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}$.

Ta có phương trình: $t\left[t^2+\frac{3\left(1-t^2\right)}{2}\right]=m \Leftrightarrow t^3-3t+2m=0.$

1) Khi $m=-1$, ta có: $\begin{cases}|t|\le\sqrt{2}\\ t^3-3t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow t=-1.$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\pi+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

2) $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ (*)

Với mỗi $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ thì $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$ và ngược lại mỗi $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$ có đúng một $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ thoả mãn (*). Vậy (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

$\Leftrightarrow t^3-3t+2m=0$ (**) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Từ (**) $\Leftrightarrow 2m=-t^3+3t$,

Xét $f(t)=-t^3+3t$ với $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$ có $f'(t)=-3t^2+3$, ta có bảng biến thiên

t		-1		0		1		$\sqrt{2}$
f'(t)	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f(t)				0	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

Từ đó có điều kiện phải tìm: $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1.$

9. 1) Điều kiện của phương trình $x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Có phương trình tương đương:

$$\left(4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3\right) + \left(3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 1\right) = 0$$

$$\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}\tan x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Phương trình vô nghiệm.

10. Điều kiện: $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

Ta có phương trình tương đương:

$$2(\cos^6 x - \sin^6 x) - \cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\dfrac{4}{3}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ k = 2n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. a) Hàm số y = cos3x có phải là hàm số chẵn không? Tại sao?

b) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ có phải là hàm số lẻ không? Tại sao?

2. Căn cứ vào đồ thị hàm số y = sinx, tìm những giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ để cho hàm số đó: a) Nhận giá trị bằng −1; b) Nhận giá trị âm.

3. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:

a) $y = \sqrt{2(1+\cos x)} + 1$; b) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$.

4. Giải các phương trình: a) $\sin(x+1) = \frac{2}{3}$; b) $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$;

c) $\cot^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$; d) $\tan\left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3}$.

5. Giải các phương trình:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; b) $25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 25$;

c) $2\sin x + \cos x = 1$; d) $\sin x + 1{,}5\cot x = 0$.

Bài tập trắc nghiệm

Chọn câu trả lời đúng trong các bài tập sau:

6. Phương trình cosx = sinx có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ là:

(A): 2 nghiệm; (B): 4 nghiệm; (C): 6 nghiệm; (D): 5 nghiệm.

7. Phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

(A): 2 nghiệm; (B): 3 nghiệm; (C): 4 nghiệm; (D): 5 nghiệm.

8. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình: $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$ là :

(A): $\frac{\pi}{6}$; (B): $\frac{2\pi}{3}$; (C): $\frac{\pi}{4}$; (D): $\frac{\pi}{3}$.

9. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là:

(A) : $-\frac{\pi}{3}$; (B) : $-\frac{\pi}{4}$; (C) : $-\frac{\pi}{6}$; (D) : $-\frac{5}{6}$.

10. Phương trình 2tanx – 2cotx – 3 = 0 có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$ là :

(A) : 1 ; (B) : 2 ; (C) : 3; (D) : 4.

11*. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) y = (3cosx – 4)(4cosx – 3sinx) ; b) y = (cosx – sinx) (3cosx – 4sinx) ;

c) $y = \frac{\sin x - \cos x + 1}{2 - \sin x}$.

12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

a) 1 – cosx = m(sinx + 1) ; b) $(2m-1)\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3} + 1 = m$;

c) $\sin^2 x - 2\cos x = m$; d) $\cos^2 x - \sin x + m = 0$.

13. Tìm k để phương trình sau vô nghiệm :

a) (k +1)sinx – kcosx = 2k ; b) $\sin^2 x + 2\cos x = 2k$.

14. Giải phương trình : $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6$.

15. Giải phương trình: $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$.

(Trích đề thi HV Quan hệ quốc tế, 1997).

16. Giải phương trình : $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{3}{2}\sin 4x$.

(Trích đề thi ĐH Giao thông, 1997) .

17. Tìm nghiệm thuộc khoảng (0 ; 2π) của phương trình :

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3.$$

(Trích đề thi đại học – khối A, 2002)

18. Giải phương trình : $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

(Trích đề thi vào đại học – khối A, 2003) .

19. Giải : $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$.

(Trích đề thi vào đại học – khối A, 2005) .

20. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sin^4 x + 6\cos^2 x - 1 > 0$; b) $\tan^2 x + \cot^2 x \geq 2$;

c) $1 - \cos x < \tan x - \sin x$; d) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) > 1$.

Hướng dẫn giải

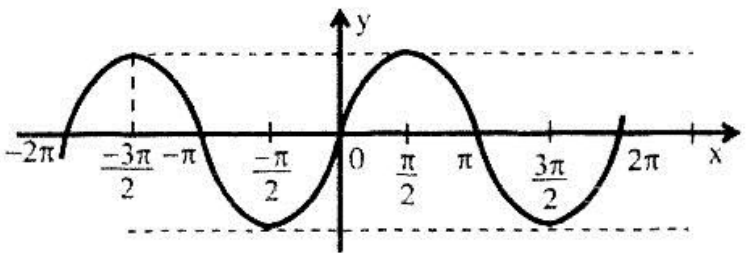
1. a) $y = f(x) = \cos 3x$, $f(-x) = \cos 3(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x = f(x)$, cho nên hàm số $y = f(x) = \cos 3x$ là hàm số chẵn.

b) $y = f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$.

$$f(-x) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{5}\right) \neq \tan\left(-x - \frac{\pi}{5}\right) \neq \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \neq -f(x),$$

nên hàm số này không phải là hàm số lẻ.

2. Hình 6 là đồ thị hàm số $y = \sin x$, căn cứ vào đồ thị trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$



Hình 6

a) Có $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng -1.

b) Trên các khoảng $(-\pi; 0)$, $(\pi, 2\pi)$ hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị âm.

3. a) $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$. GTLN y phụ thuộc vào GTLN của cosx mà GTLN $\cos x = 1$, suy ra GTLN $y = \sqrt{4} + 1 = 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \Rightarrow y \le 1$.

$$\text{GTLN } y = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

4. a) $\sin(x+1) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\frac{2}{3} - 1 + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

• $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

c) $\cot x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

d) $\tan\left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{144} + k\frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$.

5. a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

• $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$; • $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b) • Với cosx = 0, nghiệm đúng phương trình đã cho, nên $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình đã cho.

• Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được phương trình tương đương:

$$25\tan^2 x + 30\tan x + 9 = 25(\tan^2 x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 30\tan x = 16 \Leftrightarrow \tan x = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow x = \arctan\frac{8}{15} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Đặt $\tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \arctan 2$, ta có phương trình $\sin\alpha\sin x + \cos x\cos\alpha = \cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = 2\arctan 2 + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

d) Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \cos x = 2 \ (\text{loại}) \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

6. Phương án A đúng, phương trình cosx = sinx có 2 nghiệm.

Cách 1 : Vẽ đồ thị y = sinx và y = cosx trên cùng một hệ trục tọa độ. Xét trên đoạn $[-\pi; \pi]$ ta thấy chúng có 2 giao điểm. Vậy cosx = sinx có 2 nghiệm.

Cách 2 : Từ phương trình cosx = sinx $\Leftrightarrow$ cosx − sinx = 0

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Nhưng xét trên đoạn $[-\pi; \pi]$ thì k = 0; 1. Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Đáp án A đúng.

7. Điều kiện xác định $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Leftrightarrow \cos 4x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Xét trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì họ nghiệm thứ hai bị loại.

Họ nghiệm thứ nhất chỉ chấp nhận với k = 0,1. Vậy xét trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình có hai nghiệm, đáp án A đúng.

8. $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x \Leftrightarrow (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $\frac{\pi}{4}$, đáp án C đúng.

9. Đáp án B đúng.

10. Đáp án D đúng.

11. a) $y = 12\cos^2 x - 25\sin x\cos x + 12\sin^2 x$. Chắc chắn $\cos x \neq 0$ nên ta có :

$$\frac{y}{\cos^2 x} = 12 - 25\tan x + 12\tan^2 x \Leftrightarrow y(1 + \tan^2 x) = 12\tan^2 x - 25\tan x + 12$$

$$\Leftrightarrow (12 - y)\tan^2 x - 25\tan x + 12 - y = 0.$$

PT trên phải có nghiệm nên $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25^2 - 4(12 - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 25^2 \geq 4(12 - y)^2$

$$\Leftrightarrow 5 \geq 2|12 - y| \Leftrightarrow |12 - y| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq 12 - y \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{19}{2} \leq y \leq \frac{29}{2}$$

$$\Rightarrow \text{GTNN } y = \frac{19}{2}; \text{ GTLN } y = \frac{29}{2}.$$

b) Làm như câu a, có ĐS:

$$\text{GTNN } y = \frac{7 - 5\sqrt{2}}{2}; \text{ GTLN } y = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{2}.$$

c) $y = \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{2 - \sin x}$ xác định với mọi giá trị của x.

$$\Rightarrow 2y - y\sin x = \sin x - \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2y - 1 = (y + 1)\sin x - \cos x \quad (*)$$

Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức sau :

Với a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ thì $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$.

Áp dụng bất đẳng thức này vào (*) ta có :

$$(2y - 1)^2 \leq [(y + 1)^2 + 1](\sin^2 x + \cos^2 x).$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 1 \leq y^2 + 2y + 2 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\text{GTNN } y = \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$; $\text{GTLN } y = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$.

12. a) Có msinx + cosx= 1 – m, theo bài 9. c) ta có:

$$(m\sin x + \cos x)^2 \leq m^2 + 1 \Leftrightarrow (1 - m)^2 \leq m^2 + 1 \Leftrightarrow -2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$$

b) Có $(2m - 1)\sin\dfrac{x}{3} - \cos\dfrac{x}{3} = m - 1$, cũng theo bài 9. c) ta có:

$$\left[(2m - 1)\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3}\right]^2 = (2m - 1)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 \leq 4m^2 - 4m + 2$$

$\Leftrightarrow 3m^2 - 2m + 1 \geq 0 \ \forall\ m$

$\Leftrightarrow$ PT đã cho có nghiệm với mọi m.

c) Có PT tương đương:

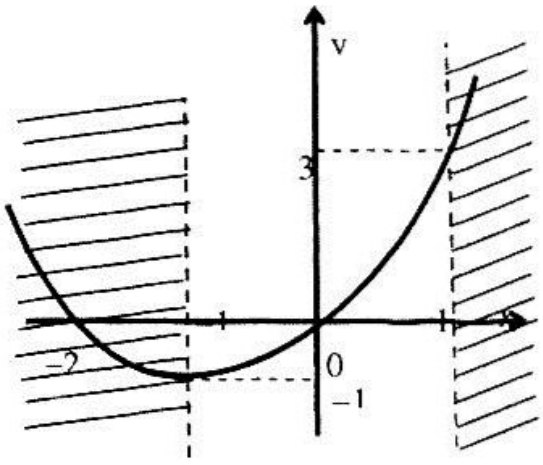
$$\cos^2x + 2\cos x = 1 - m.$$

Đặt $\cos x = t$ với $|t| \leq 1$, ta có :

$$t^2 + 2t = 1 - m$$

VT là hàm bậc 2 có đồ thị là parabol, bề lõm quay lên trên nên có cực tiểu là tung độ đỉnh: Đ $(-1; -1)$.

VP là một đường thẳng song song với trục tung.



Hình 7

Căn cứ vào đồ thị (hình 7), PT đã cho có nghiệm duy nhất với:

$$-1 \leq 1 - m \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

d) Có PT tương đương :

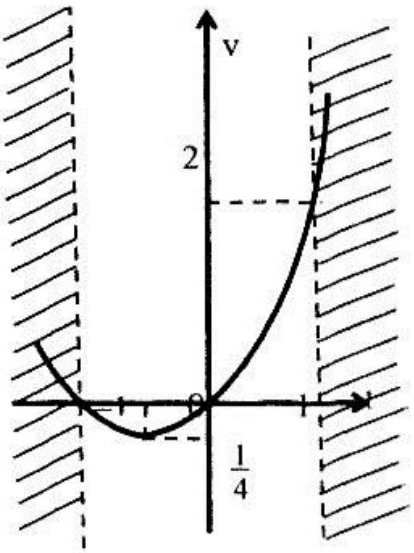
$$\sin^2x + \sin x = 1 + m.$$

Đặt $\sin x = t$ với $|t| \leq 1$, ta có :

$$t^2 + t = 1 + m$$

VT là hàm bậc 2 có đồ thị là parabol. VP là một đường thẳng song song với trục hoành. Căn cứ vào đồ thị (*h.8*), ta thấy PT đã cho có nghiệm với:

$$-\frac{1}{4} \leq m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq m \leq 1.$$



Hình 8

13. a) Theo bài tập 9. c), ta có:

$$[(k + 1)\sin x - k\cos x]^2 \leq (k + 1)^2 + k^2$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 \leq 2k^2 + 2k + 1$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 2k - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

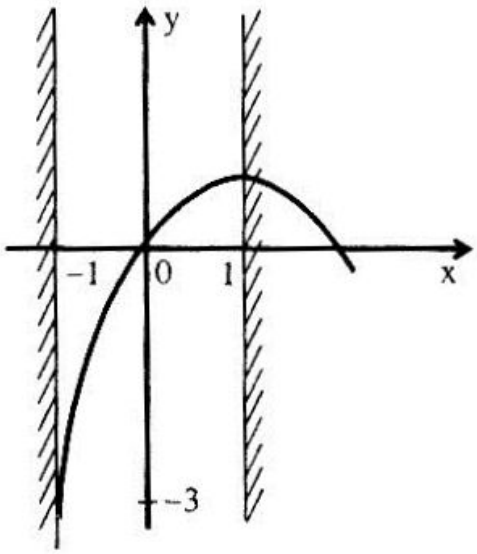
Vậy phương trình vô nghiệm với $k < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ hoặc $k > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

b) Có phương trình tương đương: $-\cos^2x + 2\cos x = 2k - 1.$

Đặt $\cos x = t$ với $|t| \leq 1$, ta có : $-t^2 + 2t = 2k - 1.$

VT là đồ thị (hình 9).

VP là đường thẳng song song với trục hoành. Căn cứ vào đồ thị ta thấy PT vô nghiệm với $k < 3$ hoặc $k > 1$.



Hình 9

14. ĐK: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Có:

$\tan x + \cot x + \tan^2 x + \cot^2 x + \tan^3 x + \cot^3 x = 6$

$\Leftrightarrow \tan x + \cot x + (\tan x + \cot x)^2 - 2$

$+ (\tan x + \cot x)^3 - 3\tan x \cot(\tan x + \cot x) = 6$

Đặt $\tan x + \cot x = t$, ta có phương trình tương đương:

$t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0$ $t = 2$

$\Leftrightarrow \tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

15. Điều kiện $\sin x \geq 0$.

Có phương trình tương đương: $\sqrt{\sin x} + \sin x = 1 - \sin^2 x - \cos x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin x} + \sin x = \cos^2 x - \cos x \Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} = \pm\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} = \cos x - \frac{1}{2} \quad (1)\\ \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \cos x \quad (2)\end{array}\right.$$

Giải: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 1\\ \sin x = 0\end{cases} \Rightarrow x = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\sin x} = -\cos x \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \leq 0\\ \sin x = \cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \leq 0\\ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \leq 0\\ \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \leq 0\\ \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\end{cases} \Rightarrow x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

16. Có phương trình tương đương:

$$1 + (\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x\cos 2x) = 3\sin 2x\cos 2x.$$

Đặt $\sin 2x + \cos 2x = t$ với $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin 2x\cos 2x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, có phương trình tương đương: $t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2 + 2t - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t^2 + 2t - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x + \cos 2x = -1 \\ \text{Vô nghiệm vì } |t| > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \text{(thỏa mãn điều kiện)}.$$

17. $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3.$

Điều kiện: $1 + 2\sin x \ne 0 \Rightarrow \sin 2x \ne -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x \ne -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x \ne \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Biến đổi vế trái:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 5\frac{\sin x + 2\sin x\sin 2x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}$$

$$= 5\frac{\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = 5\frac{(2\sin 2x + 1)\cos x}{1 + 2\sin 2x} = 5\cos x.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$5\cos x = 2\cos 2x + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

$\Rightarrow \cos x = 2$ (loại) hoặc $\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in (0; 2\pi)$ nên lấy $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{3}$ ta thấy x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $\sin 2x \ne -\dfrac{1}{2}$. Vậy các nghiệm cần tìm là $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{3}$.

18. Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \text{tg}x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} + \sin^2 x - \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 - \cos x \sin x + \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ 1 - \sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \end{array}\right.$$

• $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• $1 - \cos x \sin x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x = 0$, vô nghiệm (vì VT là một số dương) $\forall x$.

19. Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\frac{\cos 6x + 1}{2}\cos 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x + \cos 2x - (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 1 \\ \cos 4x = -\dfrac{3}{2}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

• $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$

20. a) Có BPT tương đương: $\sin^4 x - 6\sin^2 x + 5 > 0 \Leftrightarrow \sin^2 x < 1$;

$5 < \sin^2 x \Leftrightarrow 1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow$ đúng với mọi x.

b) Xét hiệu: $\tan^2 x + \cot^2 x - 2 = (\tan x - \cot x)^2 \geq 0.$

Dấu = xảy ra khi $\tan x = \cot x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$

c) $1 - \cos x < \tan x(1 - \cos x) \Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \tan x) < 0.$

Có hai hệ BPT tương đương:

(I) $\begin{cases} 1-\cos x<0 \\ 1-\tan x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x>1 \\ \tan x<1 \end{cases} \Rightarrow$ không có giá trị nào của x thoả mãn

$\cos x>1 \Rightarrow$ BPT vô nghiệm.

(II) $\begin{cases} 1-\cos x>0 \\ 1-\tan x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x<1 \\ \tan x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k2\pi \\ k\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)>\dfrac{1}{2}$ (góc phụ nhau) $\Rightarrow \quad k2\pi+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{4}+x<\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

$\Leftrightarrow k2\pi-\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$

CHƯƠNG II. TỔ HỢP - XÁC SUẤT

§1. QUY TẮC ĐẾM

Bài tập

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

a) Một chữ số ?

b) Hai chữ số ?

c) Hai chữ số khác nhau ?

d) Không quá ba chữ số ?

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên:

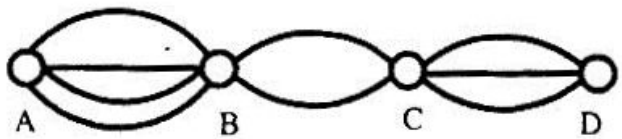
a) Bé hơn 100 ?

b) Bé hơn 1000 ?

3. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các đoạn như hình 10. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D, qua B và C chỉ một lần?

b) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?

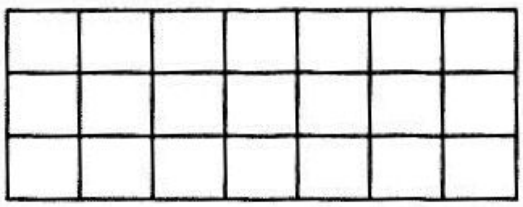


Hình 10

4. Có ba kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elíp) và có bốn kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ một kiểu mặt và một dây?

5*. Một lớp có 40 học sinh đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: bóng đá và bóng chuyền. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký chơi cả hai môn thể thao?

6. Hãy đếm số các hình vuông trong hình 11.



Hình 11

Hướng dẫn giải

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được:

a) Số tự nhiên có 1 chữ số: 4 số.

b) Số tự nhiên có 2 chữ số: 4.4 = 16 số.

c) Số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau: 4.3 = 12 số.

d) Số tự nhiên không quá 3 chữ số: 4 + (4.4) + (4.4.4) = 84 số.

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Bé hơn 100: $\overline{ab}$ có 6.6 = 36 số. b) Bé hơn 1000: $\overline{abc}$ có 6.6.6 = 216 số.

3. Từ A đến B có 4 cách đi .

Từ A đến C có 4.2 cách đi.

Từ A đến D có 4.2.3 = 24 cách đi.

Từ A đến D rồi quay về A có 24.24 = 576 cách đi. *Hình 12*

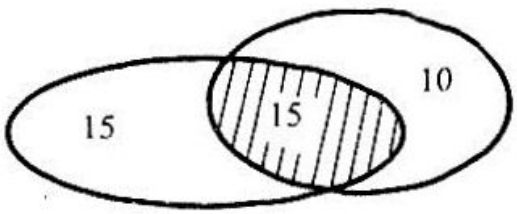
4. Chỉ chọn kiểu mặt đồng hồ: có 3 cách chọn.

Mỗi cách chọn mặt đồng hồ có 4 cách chọn dây ⇒ có 3.4 = 12 cách chọn khác nhau về một chiếc đồng hồ (cả kiểu mặt và kiểu dây).

5. Số em học sinh chỉ đăng ký bóng chuyền : 40 - 30 = 10
Số em học sinh chỉ đăng ký chơi bóng đá: 40 - 25 = 15
} ⇒ đăng ký một môn: 25.

Vậy số em đăng ký chơi cả 2 môn là:

40 – (10 + 15) = 15 em (h. 13).



Hình 13

6. Số các hình vuông có cạnh dài 1 là: 21.

Số các cạnh hình vuông có cạnh dài 2 là:

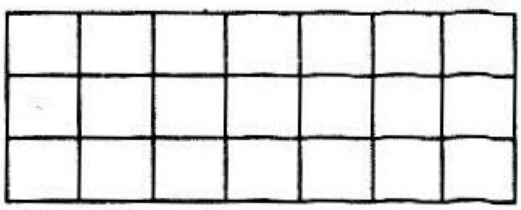
2.6 = 12.

Số các hình vuông có cạnh dài 3 là:

1.5 = 5.

Số các hình vuông có trong hình là :

21 + 12 + 5 = 38.



Hình 14

§2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

Bài tập

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi:

a) Có tất cả bao nhiêu số?

b) Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432 000?

2. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho mười người khách vào mười ghế kê thành dãy?

3. Giả sử có bảy bông hoa màu khác nhau và ba cái lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba cái lọ đã cho? (Mỗi lọ cắm một bông).

4. Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn chọn từ 6 bóng đèn kiểu khác nhau? Mỗi cách mắc là một thông tin nào đó được xác định bởi số bóng, kiểu của chúng và thứ tự sắp xếp các bóng đèn đó.

5. Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 cái lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá 1 bông hoa)?

6. Trong mặt phẳng, cho sáu điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

7. Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ 4 đường thẳng song song với nhau và 5 đường thẳng vuông góc với 4 đường thẳng song song đó ?

8*. Hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy năm ghế được xếp ở hai bên một chiếc bàn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho năm bạn lớp A và năm bạn lớp B sao cho:

a) Không có hai bạn cùng lớp ngồi đối diện nhau?

b) Không có hai bạn cùng lớp nào ngồi đối diện với nhau hoặc cạnh nhau?

Hướng dẫn giải

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các chữ số gồm 6 chữ số khác nhau.

a) Có bao nhiêu số: 6! = 1.2.3.4.5.6 = 720 số.

b) Có bao nhiêu số lẻ: 3.(5!) = 3.120 = 360 số lẻ và 360 số chẵn.

c) Có bao nhiêu số < 432.000 Mỗi số có dạng $\overline{abcdef}$.

$a \leq 3$ có: 3.4.5.3.2.1 = 3.(5!) = 360 số.

a = 4 có: 1.2.3.3.2.1 = 2.(4!) = 48 số (b < 3)

a = 4, b = 3 có: 1.1.1.3.2.1 = 3! = 6 số.

Tổng số có 414 số.

2. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 khách vào 10 ghế kê thành dãy: Mỗi cách xếp là 1 hoán vị của 10 phần tử.

Vậy có: 10! = 3.628.800 cách xếp.

3. Có 7 bông hoa màu khác nhau và 3 lọ khác nhau.

Số cách lựa chọn 3 bông hoa trong 7 bông hoa là: $C_7^3 = 35$ cách.

Khi đã có 3 bông hoa khác nhau để cắm vào 3 lọ khác nhau là 3!.

Vậy có C_7^3 .3! cách cắm hoa theo đề bài ra.

Đáp số $3!\, C_7^3 = A_7^3 = 210$ cách.

4. Mỗi tín hiệu là một cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn lấy từ 6 bóng đèn có chú ý đến thứ tự của bóng. Vậy số cách mắc 4 bóng đèn trong 6 bóng đèn có chú ý đến thứ tự sẽ là: $A_6^4 = 6.5.4.3 = 360$ tín hiệu.

5. *Hướng dẫn :* * Ba bông hoa giống nhau, đáp số là: $C_5^3 = 10$ (cách).

* Ba bông hoa khác nhau, đáp số là: $A_5^3 = 60$ (cách).

6. Số các tam giác lập được là: $C_6^3 = 20$.

7. Cách làm gần giống bài số 4 phần §1 (Quy tắc đếm).

Số hình chữ nhật cạnh a_1 là 7

Số hình chữ nhật cạnh a_2 là 7.

Số hình chữ nhật cạnh a_3 là 7.

Số hình chữ nhật cạnh $a_1 + a_2$ là 7.

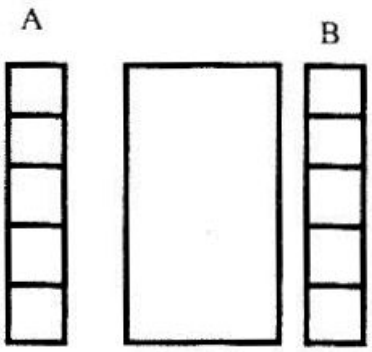
Số hình chữ nhật cạnh $a_2 + a_3$ là 7.

Số hình chữ nhật cạnh $a_1 + a_2 + a_3$ là 7.

Tổng số hình chữ nhật có là: $6.7 = 42$ hình.

8. *Trường hợp 1:* Lớp A ngồi bên trái, lớp B bên phải:

$$\left.\begin{array}{l} 5! \text{ cách xếp học sinh lớp A} \\ 5! \text{ cách xếp học sinh lớp B} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Có } (5!)^2 \text{ cách xếp lớp A \& B}$$



Hình 15

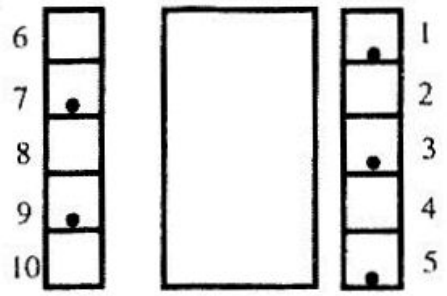
Trường hợp 2: Lớp A vẫn ngồi bên trái có 1 em di chuyển sang phải khi đó 1 em lớp B sang trái ở cùng vị trí đánh số thứ tự (giả thiết từ trên xuống).

Khi đó số cách xếp chỗ cho cả A và B là: $C_5^1(5!)^2$.

Trường hợp 3: Lớp A vẫn ngồi bên trái cho 2 em di chuyển sang phải đổi chỗ cho hai em lớp B. Khi đó số cách xếp chỗ cho cả A và B là: $C_5^2(5!)^2$.

Trường hợp 4: Cho 3 em của 2 lớp đổi vị trí tương ứng $C_5^3(5!)^2$.

Trường hợp 5: Cho 4 em của 2 lớp đổi vị trí tương ứng $C_5^4(5!)^2$.



Hình 16

Trường hợp 6: Cho 5 em của 2 lớp đổi vị trí tương ứng $C_5^5(5!)^2$.

Vậy với quy định lớp A bên trái có tất cả $(C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5)(5!)^2$.

Số cách xếp chỗ theo yêu cầu của câu a là: $2.2^5(5!)^2 = 921.600$.

b) Nếu không có 2 bạn cùng lớp ngồi đối diện hoặc cạnh nhau thì chỉ có thể ngồi xen kẽ theo sơ đồ sau:

Một lớp ngồi số chẵn, một lớp ngồi số lẻ.

Do đó số cách sắp xếp là: $2(5!)^2 = 28.800$ cách.

§3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

1. Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-tơn:

a) $(a + 2b)^5$; b) $\left(a - \sqrt{2}\right)^6$; c) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

2. Tìm số hạng thứ sáu của khai triển nhị thức theo công thức nhị thức Niu-tơn (1).

a) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{15}$; b) $(1 - 2y)^{21}$.

3. Tìm số hạng thứ mười ba của khai triển nhị thức theo công thức nhị thức Niu-tơn (1): $\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\right)^{15}$.

4. Xét xem số hạng thứ mấy của khai triển nhị thức theo công thức nhị thức Niu-tơn (1): $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^6$ không chứa x.

5. Từ khai triển nhị thức: $(3x - 4)^{17}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức.

6. Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100; b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10 000;

c) $\sqrt{10}\left[\left(1 + \sqrt{10}\right)^{100} - \left(1 - \sqrt{10}\right)^{100}\right]$ là một số nguyên.

Hướng dẫn giải

1. $(a+2b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4(2b) + C_5^2a^3(2b)^2 + C_5^3a^2(2b)^3 + C_5^4a(2b)^4 + C_5^5(2b)^5$

$= C_5^0a^5 + 2C_5^1a^4b + 4C_5^2a^3b^2 + 8C_5^3a^2b^3 + 16C_5^4ab^4 + 32C_5^5b^5$

$= a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$

$= \sum_{k=0}^{5} C_5^k.2^k.a^{5-k}.b^k;$

$\left(a-\sqrt{2}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k.a^{6-k}\left(-\sqrt{2}\right)^k$

$= C_6^0.a^6 - \sqrt{2}C_6^1.a^5 + 2C_6^2.a^4 - 2\sqrt{2}C_6^3.a^3 + 4C_6^4.a^2 - 4\sqrt{2}C_6^5.a + 8C_6^6$

$= a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8;$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k.x^{13-k}\left(-x^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k.(-1)^k.x^{13-2k}$

$= C_{13}^0x^{13} - C_{13}^1x^{11} + C_{13}^2x^9 - C_{13}^3x^7 + C_{13}^4x^5 - C_{13}^5x^3 + C_{13}^6x - C_{13}^7x^{-1}$
$+C_{13}^8x^{-3} - C_{13}^9x^{-5} + C_{13}^{10}x^{-7} - C_{13}^{11}x^{-9} + C_{13}^{12}x^{-11} - C_{13}^{13}x^{-13}$

$= x^{13} - 13x^{11} + 78x^9 - 286x^7 + 715x^5 - 1287x^3 + 1716x - 1716\frac{1}{x}$

$+1287\frac{1}{x^3} - 715\frac{1}{x^5} + 286\frac{1}{x^7} - 78\frac{1}{x^9} + 13\frac{1}{x^{11}} - \frac{1}{x^{13}}.$

2. Cho $A=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k\left(\sqrt{x}\right)^{15-k}\left(x^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{15-3k}{2}};$

Số hạng thứ 6 là: $T_5 = C_{15}^5x^0 = 3003.$

Cho $B=(1-2y)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k.1^{21-k}(-2y)^k = \sum_{k=0}^{21}(-2)^k C_{21}^k y^k;$

Số hạng thứ 6 ứng với k = 5 là: $T_5 = (-2)^5C_{15}^5y^5 = (-32).20349.y^5 = -651168y^5.$

3. Cho $C=(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}(\sqrt[3]{3})^{15-k}(\sqrt{2})^{k}$.

Số hạng thứ 13 ứng với k = 12

$$\Rightarrow T_{12}=C_{15}^{12}(\sqrt[3]{3})^{3}(\sqrt{2})^{12}=C_{15}^{12}.3.2^{6}=495.3.64=95\,040.$$

4. Cho $M=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{6}=\sum_{k=0}^{6}C_{6}^{k}.(\sqrt[3]{x})^{6-k}.(x^{-1})^{k}=\sum_{k=0}^{6}C_{6}^{k}.x^{\frac{6-4k}{3}}$.

Số hạng không chứa x trong khai triển trên của M ứng với điều kiện 6 - 4k = 0

$\Rightarrow k=\frac{3}{2}$ không là số tự nhiên. Trong khai triển của M cả bảy số hạng đều chứa x.

5. Cho $P=(3x-4)^{17}=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^{k}(3x)^{17-k}.(-4)^{k}=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^{k}3^{17-k}(-4)^{k}x^{(17-k)}=\sum_{i=0}^{17}A_{i}x^{i}$;

$$P=(3x-4)^{17}=A_{0}x+A_{1}x+A_{2}x^{2}+A_{3}x^{3}+...+A_{k}x^{k}+...+A_{17}x^{17}.$$

Do đó để tính $\sum_{i=0}^{17}A_{i}$ ta thay x= 1. Vậy $\sum_{i=0}^{17}A_{i}=(-1)^{17}=-1$.

6. Chứng minh: $11^{10}-1$ chia hết cho 100.

a) Ta có: $11^{10}=(10+1)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}.10^{k}=1+C_{10}^{1}.10+C_{10}^{2}.10^{2}+C_{10}^{3}.10^{3}+...+C_{10}^{10}.10^{10}$

Do đó: $11^{10}-1=C_{10}^{1}.10+C_{10}^{2}.10^{2}+C_{10}^{3}.10^{3}+...+C_{10}^{10}.10^{10}$

$$=100(1+C_{10}^{2}+C_{10}^{3}10+...+C_{10}^{10}10^{8})\vdots 100.$$

b) Chứng minh: $101^{100}-1$ chia hết cho $10.000 = 10^4$.

Ta có $101^{100}=(10^{2}+1)^{100}=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}.(10^{2})^{k}=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}.100^{k}$

$$=1+C_{100}^{1}.100+C_{100}^{2}.100^{2}+C_{100}^{3}.100^{3}+...+C_{100}^{100}.100^{100}.$$

Do đó: $101^{100}-1=C_{100}^{1}.100+C_{100}^{2}.100^{2}+C_{100}^{3}.100^{3}+...+C_{100}^{100}.100^{100}$

$$=100^{2}+C_{100}^{2}.100^{2}+C_{100}^{3}.100^{3}+...+C_{100}^{100}.100^{100}$$

$$=100^2(1+C_{100}^2+C_{100}^3.100+C_{100}^4.100^2+...+C_{100}^{100}.100^{98}):10^4.$$

c) $\sqrt{10}\left[(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}\right]$ là 1 số nguyên.

Ta có: $(1+\sqrt{10})^{100}=C_{100}^0+C_{100}^1\sqrt{10}+C_{100}^2\sqrt{10}^2+C_{100}^3\sqrt{10}^3+...+C_{100}^{100}\sqrt{10}^{100}$;

$$(1-\sqrt{10})^{100}=C_{100}^0-C_{100}^1\sqrt{10}+C_{100}^2\sqrt{10}^2-C_{100}^3\sqrt{10}^3+...+C_{100}^{100}\sqrt{10}^{100}$$

Do đó: $\left[(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}\right]=2\left[C_{100}^1\sqrt{10}+C_{100}^3\sqrt{10}^3+...+C_{100}^{99}\sqrt{10}^{99}\right]$

$$=2\sqrt{10}\left[C_{100}^1+C_{100}^3 10+...+C_{100}^{99}10^{49}\right].$$

Nên: $\sqrt{10}\left[(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}\right]=20\left[C_{100}^1+C_{100}^3 10+...+C_{100}^{99}10^{49}\right]$

là một số nguyên đã chia hết cho 200.

§ 4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

Bài tập

1. Gieo một đồng tiền ba lần.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố:

A: "Lần đầu xuất hiện mặt sấp";

B: "Mặt sấp xảy ra đúng một lần";

C: "Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần".

2. Gieo một con súc sắc hai lần.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Phát biểu các biến cố sau dưới dạng mệnh đề:

A = {(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)};

B = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)};

C = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5),(6,6)}.

3. Một hộp chứa 4 cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn";

B: "Tích các số trên hai thẻ là số chẵn".

4. Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Ký hiệu A_k là biến cố: "Người thứ k bắn trúng", k = 1, 2.

a) Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2:

A: "Không ai bắn trúng";

B: "Cả hai đều bắn trúng";

C: "Có đúng một người bắn trúng";

D: "Có ít nhất một người bắn trúng".

b) Chứng tỏ rằng $A = \overline{D}$; B và C xung khắc.

5. Từ một hộp chứa 10 cái thẻ, trong đó các thẻ đánh số 1, 2, 3, 4, 5 màu đỏ, thẻ đánh số 6 màu xanh và các thẻ đánh số 7, 8, 9, 10 màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Kí hiệu A, B, C là các biến cố sau:

A: "Lấy được thẻ màu đỏ";

B: "Lấy được thẻ màu trắng";

C: "Lấy được thẻ ghi số chẵn".

Hãy biểu diễn các biến cố A, B, C bởi các tập hợp con tương ứng của không gian mẫu.

6. Gieo một đồng tiền liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp hoặc cả bốn lần ngửa thì dừng lại.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố:

A: "Số lần gieo không vượt quá ba";

B: "Số lần gieo là bốn".

7. Từ một hộp chứa 5 quả cầu được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi lần một quả và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

a) Xây dựng không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Chữ số sau lớn hơn chữ số trước";

B: "Chữ số trước gấp đôi chữ số sau";

C: "Hai chữ số bằng nhau".

Hướng dẫn giải

1. Gieo một đồng tiền 3 lần.

a) Không gian mẫu: SSS SSN SNS SNN
NNN NNS NSN NSS

b) Biến cố :

A: Lần đầu xuất hiện mặt sấp: [SSS, SSN, SNS, SNN]

B: Mặt sấp xảy ra đúng 1 lần: [SNN, NSN, NNS]

C: Mặt ngửa xảy ra ít nhất 1 lần [SSN, SNS, NSS, SNN, NNS, NSN, NNN].

2. Gieo một con xúc sắc 2 lần.

a) Không gian mẫu: (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)

(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)

(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)

(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)

(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,6) (6,6)

b) Biến cố: A = [(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,6) (6,6)]
=Lần gieo đầu xuất hiện 6 chấm.

Biến cố B = [(2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4)]

Biến cố B = [(2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4)]

= Tổng số chấm là 8 trong 2 lần gieo.

Biến cố C = [(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)]

= Hai lần gieo đều cùng được một số chấm.

3. Một hộp chứa 4 thẻ đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ cùng một lúc.

a) Không gian mẫu sẽ là: $\Omega = \{(1,2)\ \ (1,3)\ \ (1,4)\ \ (2,3)\ \ (3,4)\}$.

b) Biến cố A = Tổng các số trên 2 thẻ là chẵn = [(1,3), (2,4)].

Biến cố B = Tích các số trên 2 thẻ là chẵn = [(1,2); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)].

4. Không gian mẫu là $\left[A_1A_2, \overline{A}A_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1\overline{A}_2\right]$.

Biến cố A: Không ai bắn trúng cả: $\left[\overline{A}_1\overline{A}_2\right]$.

Biến cố B: Cả 2 đều bắn trúng: $\left[A_1A_2\right]$.

Biến cố C: Có đúng một người bắn trúng: $\left[\overline{A_1}A_2, A_1\overline{A_2}\right]$.

Biến cố D: ít nhất một người bắn trúng: $\left[A_1A_2, \overline{A_1}A_2, A_1\overline{A_2}\right]$.

5. Không gian mẫu

Ω = {(thẻ 1), (thẻ 2), (thẻ 3), (thẻ 4), (thẻ 5), (thẻ 6), (thẻ 7), (thẻ 8), (thẻ 9), (thẻ 10)}

Biến cố A: Lấy được thẻ màu đỏ Ω_A = {(thẻ 1), (thẻ 2), (thẻ 3), (thẻ 4), (thẻ 5)}

Biến cố B: Lấy được thẻ màu trắng: Ω_B = {(thẻ 7), (thẻ 8), (thẻ 9), (thẻ 10)}

Biến cố C: Lấy được thẻ ghi số chẵn : Ω_C = {(thẻ 2), (thẻ 4), (thẻ 6), (thẻ 8), (thẻ 10)}

Ta có : $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{4}{10}$, $P(C) = \frac{5}{10}$.

6. Không gian mẫu: Ω = {(S), (NS), (NNS), (NNNS), (NNNN)}

Biến cố A: Số lần gieo không vượt quá 3 có Ω_A = {(S), (NS), (NNS)}.

Biến cố B: Số lần gieo là 4: Ω_B = {(NNNS), (NNNN)}.

7. Không gian mẫu:

Ω = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5)

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5)

(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5)

(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5)

(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5)} có 25 phần tử.

b) Biến cố A: Chữ số lần sau lớn hơn lần trước có:

Ω_A = {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)} có 10 phần tử.

c) Biến cố B: Chữ số lần trước gấp đôi chữ số lần sau:

Ω_B = {(2,1), (4,2)} có 2 phần tử.

d) Biến cố C: Hai chữ số bằng nhau:

Ω_C = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)} có 5 phần tử.

§ 5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Bài tập

1. Gieo ngẫu nhiên một cón súc sắc cân đối và đồng chất hai lần.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng số chấm không bé hơn 10";

B: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

c) Tính P(A), P(B).

2. Có bốn tấm bìa như nhau được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên ba tấm.

a) Hãy mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên ba tấm bằng 8";

B: "Các số trên ba tấm là ba số tự nhiên liên tiếp".

c) Tính P(A), P(B).

3. Một người chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để hai chiếc chọn được tạo thành một đôi.

4. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Nếu con súc sắc hiện mặt b chấm thì thay b vào phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$. Tính xác suất sao cho:

a) Phương trình có nghiệm;

b) Phương trình vô nghiệm;

c) Phương trình có nghiệm nguyên.

5. Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con rút ngẫu nhiên cùng một lúc bốn con. Tính xác suất sao cho:

a) Cả bốn con đều là át;

b) Được ít nhất một con át;

c) Được hai con át và hai con K.

6. Hai bạn nam và hai bạn nữ được ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:

a) Nam, nữ ngồi đối diện nhau;

b) Nữ ngồi đối diện nhau.

7. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả cầu trắng, 6 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả.
Kí hiệu: A là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ nhất trắng";

B là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ hai trắng";

a) Xem xét A và B có độc lập không?

b) Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu.

c) Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra khác màu.

Hướng dẫn giải

1. a) Khi gieo con xúc sắc cân đối và đồng chất 2 lần ta có không gian mẫu:

{(1; 1) (1; 2) (1; 3) (1; 4) (1; 5) (1; 6)
(2; 1) (2; 2) (2; 3) (2; 4) (2; 5) (2; 6)
(3; 1) (3; 2) (3; 3) (3; 4) (3; 5) (3; 6)
(4; 1) (4; 2) (4; 3) (4; 4) (4; 5) (4; 6)
(5; 1) (5; 2) (5; 3) (5; 4) (5; 5) (5; 6)
(6; 1) (6; 2) (6; 3) (6; 4) (6; 5) (6; 6)}

b) Biến cố A: Tổng số chấm không bé hơn 10.

$$A = \{(5; 5), (5; 6), (6; 5), (6; 6), (4; 6), (6; 4)\}.$$

Biến cố B: Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất 1 lần:

$$B = \{(1; 5),(2; 5),(3; 5),(4; 5),(5; 5),(6; 5),(5; 1),(5; 2),(5; 3),(5; 4),(5; 6)\}.$$

c) $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{11}{36}$

2. Có bốn tấm bìa như nhau được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên 3 tấm hiểu theo nghĩa lấy cùng một lúc.

a) Không gian mẫu:

$$\{(1; 2; 3), (1; 2; 4), (1; 3; 4), (2; 3; 4)\}.$$

b) Biến cố A: Tổng các số trên 3 tấm bằng 8.

$$A = \{(1; 3; 4)\}.$$

Biến cố B: Các số trên 3 tấm là 3 số tự nhiên liên tiếp.

$$B = \{(1; 2; 3), (2; 3; 4)\}.$$

• *Chú ý:* Mỗi phần tử (a; b; c) trong không gian mẫu chỉ ra 3 tấm có mặt trong phần tử này là a và b và c trong đó không cần tính đến thứ tự sắp xếp.

c) $P(A)=\frac{1}{4}=0,25$; $P(B)=\frac{2}{4}=0,5$.

3. Biến cố A: Hai chiếc giày được chọn từ từ 4 đôi giày cỡ khác nhau tạo thành một đôi.

Ta có : 4 cách chọn ra hai chiếc giày đúng đôi vì có 4 đôi và có $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28$ cách chọn 2 chiếc giày từ 4 đôi có cỡ khác nhau $\Rightarrow P(A)=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$.

4. - Phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm $\Delta = b^2 - 8 \geq 0$ mà b là số chấm xuất hiện khi gieo con súc sắc $\Rightarrow$ để phương trình có nghiệm thì b = 3, 4, 5, 6 (vì thoả mãn $\Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 8$) $\Rightarrow$ P(phương trình có nghiệm) $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

- Phương trình vô nghiệm khi b = 1, 2.

$\Rightarrow P(\text{phương trình vô nghiệm})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

- Phương trình có nghiệm nguyên khi b = 3.

$\Rightarrow$ P(phương trình có nghiệm nguyên) = $\frac{1}{6}$.

5. Rút 4 con bài từ bộ bài tú lơ khơ có 52 con.

- Biến cố A : Cả bốn con đều là át.

Ta có $C_4^4 = 1$ cách rút 4 con là át.

và có $C_{52}^4 = \frac{52!}{4!48!} = 270725$ cách rút 4 con bất kỳ $\Rightarrow P(A)=\frac{1}{270725}$.

- Biến cố B : Được ít nhất một con át.

$\Rightarrow$ Biến cố $\overline{B}$: Không được con át nào đối lập với biến cố B.

Ta có : $C_{48}^4 = \frac{48!}{4!44!} = 194780$ cách rút 4 con không có con át nào

và $P(\overline{B})=\frac{194780}{270725}=\frac{38956}{54145}$.

Do đó $P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{15189}{54145}$.

- Biến cố C: Được 2 con át, 2 con K.

Ta có: $C_4^2.C_4^2=36$ cách rút ra 2 con át và 2 con K.

$$\Rightarrow P(C)=\frac{36}{270725}.$$

6. Xếp 2 nam và 2 nữ vào 4 chiếc ghế xếp thành 2 dãy đối diện nhau:

- Số cách xếp bất kỳ là: 4! = 24 cách.

- Số cách xếp cho 2 nữ và 2 nam ngồi đối diện nhau:

Nếu gọi 2 dãy ghế là dãy 1 và dãy 2 thì:

+ Khi xếp cho 2 nữ ngồi dãy 1 và 2 nam ngồi dãy 2 thì số cách xếp là: 2! . 2! = 4;

+ Khi 2 nữ ngồi dãy 2 và 2 nam ngồi dãy 1 thì lại có số cách xếp là: : 2! . 2! = 4.

Vậy số cách để 2 nữ và 2 nam ngồi đối diện nhau là: 4 + 4 = 8;

Với A là biến cố nam nữ ngồi đối diện nhau thì: $P(A)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

- Số cách nữ ngồi đối diện nhau (tức là nam cũng đối diện nhau). Lý luận cũng như trên số cách để 2 nữ đối diện nhau và nam cũng phải đối diện nhau cũng sẽ là 8 cách. Do đó biến cố B này cũng có: $P(B)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

7. Có 2 hộp bi

Hộp I có 6 bi trắng, 4 bi đen.

Hộp II có 4 bi đen, 6 bi trắng.

Từ mỗi hộp lấy ra 1 viên bi.

a) Gọi A: Biến cố bi lấy từ hộp I là trắng

B: Biến cố bi lấy từ hộp II là trắng.

$\Rightarrow$ A và B là hai biến cố độc lập.

b) Xác suất để 2 bi lấy ra từ 2 hộp cùng màu :

$$P(\text{2 bi cùng màu}) = P(A)P(B) + P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{12}{25}.$$

c) Xác suất để 2 bi khác màu :

* P(2 bi khác màu) : $P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = \frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10} + \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{13}{25}$.

* Hoặc P(2 bi khác màu) = 1 − P(2 bi cùng màu) $= 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Phát biểu quy tắc cộng, cho ví dụ áp dụng.

2. Phát biểu quy tắc nhân, cho ví dụ áp dụng.

3. Phân biệt sự khác nhau giữa một chỉnh hợp chập k của n phần tử và tổ hợp chập k của n phần tử.

4. Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số được tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sao cho:

a) Các chữ số có thể giống nhau?

b) Các chữ số khác nhau?

5. Xếp ngẫu nhiên ba nam và ba nữ ngồi vào sáu ghế xếp thành hàng ngang. Tìm xác suất sao cho:

a) Nam nữ ngồi xen kẽ nhau;

b) Nam ngồi cạnh nhau.

6. Từ một hộp chứa sáu quả cầu trắng và bốn quả cầu đen, lấy ra ngẫu nhiên bốn quả (cùng một lúc). Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả lấy ra cùng màu;

b) Có ít nhất một quả trắng.

7. Gieo một con súc sắc ba lần. Tính xác suất sao cho mặt sáu chấm xuất hiện ít nhất một lần.

8. Cho một lục giác đều ABCDEF. Viết các chữ cái A, B, C, D, E, F vào sáu cái thẻ. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Tìm xác suất sao cho đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ đó là:

a) Cạnh của lục giác;

b) Đường chéo của lục giác;

c) Đường chéo nối hai đỉnh đối diện lục giác.

9. Giả sử A và B là hai biến cố và $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

a) A và B có xung khắc không?

b) Tính $P(A\cap\overline{B})$.

Bài tập trắc nghiệm

10. Lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con. Số cách lấy là:

(A): 104; (B): 1326; (C): 450.

11. Năm người được xếp vào ngồi quanh một bàn tròn với năm ghế được đánh số từ 1 đến 5.

Số cách xếp là:

(A): 50; (B): 100; (C): 120.

12. Gieo một con xúc sắc hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu là:

(A): $\frac{12}{36}$; (B): $\frac{11}{36}$; (C): $\frac{6}{36}$.

13. Từ một hộp chứa ba quả cầu trắng và hai quả cầu đen lấy ngẫu nhiên hai quả. Xác suất để lấy được cả hai quả trắng là:

(A): $\frac{9}{30}$; (B): $\frac{12}{30}$; (C): $\frac{10}{30}$.

14. Gieo ba con xúc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện ba con như nhau là:

(A): $\frac{12}{216}$; (B): $\frac{1}{216}$; (C): $\frac{6}{216}$.

15. Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là:

(A): $\frac{4}{16}$; (B): $\frac{2}{16}$; (C): $\frac{1}{16}$.

Hướng dẫn giải

1. Phát biểu quy tắc cộng. Cho ví dụ:

"Một công việc nào đó có thể tiến hành theo k phương án là A_1, A_2, ..., A_k. Phương án A_k có thể thực hiện bởi n_k cách, khi đó công việc có thể thực hiện bởi :

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i \text{ cách."}$$

Ví dụ: Bạn A có thể diện 1 loại thời trang đẹp trong 5 phương án là đội mũ đẹp, mặc áo đẹp, mặc quần đẹp, đi giày đẹp, đi xe đạp đẹp. Với phương án mũ đẹp có 5 cách, áo đẹp có 7 cách, quần đẹp có 6 cách, giày đẹp có 4 cách, xe đạp đẹp có 2 cách. Thì việc diện thời trang bởi một loại đồ vật sẽ có: 5 + 7 + 6 + 4 + 2 = 24 cách.

2. Phát biểu quy tắc nhân. Cho ví dụ:

"Một công việc nào đó bao gồm k công đoạn A_1, A_2, ..., A_k. Công đoạn A_k có thể thực hiện bởi n_k cách. Khi đó thực hiện k công đoạn đó sẽ được thực hiện bởi:

$$n_1 . n_2 ... n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i \text{ cách."}$$

Ví dụ: Vẫn dùng ví dụ trên. Bạn A diện thời trang với cả 5 loại đồ vật trên.

Bạn A đội mũ đẹp có 5 cách. Khi đã đội mũ đẹp rồi thì sẽ có 7 cách chọn áo đẹp. Vậy có 5.7 cách chọn mũ, áo. Với mỗi cách chọn mũ, áo thì sẽ có 6 cách chọn quần đẹp $\Rightarrow$ Có 5.7.6 cách chọn mũ, áo, quần đẹp. Suy luận tương tự sẽ có 5.7.6.4 cách chọn mũ, áo, quần và giày. Do đó để diện cả mũ, áo, quần, giày, và xe đạp sẽ có: 5.7.6.4.2 = 1680 cách.

3. Một chỉnh hợp chập k của n phần tử và một tổ hợp chập k của n phần tử giống nhau ở chỗ đều có k phần tử: Khác nhau ở chỗ có chú ý đến sắp xếp thứ tự (ở chỉnh hợp) và không phân biệt thứ tự (ở tổ hợp).

Ví dụ: Chi đoàn số 5 có 3 bạn An, Bình, Lan ở trong Ban chấp hành. Đây là tổ hợp chập 3 của n phần tử. Trong 3 ban đó nếu phân biệt thứ tự thì An - Bí thư, Bình - Phó bí thư, Lan là ủy viên ban chấp hành thì sẽ là một chỉnh hợp chập 3 của n phần tử. Từ một tổ hợp chập 3 tạo ra 3! chỉnh hợp chập 3 của n phần tử.

4. Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số được tạo thành từ các chữ số:

{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6} với điều kiện sau:

a) Các chữ số có thể giống nhau. Số đó có dạng: $\overline{abcd}$.

Chữ số a có 6 cách chọn ($a \neq 0$).

Chữ số b có 7 cách chọn (vì b có thể trùng với a).

Chữ số c có 7 cách chọn.

Chữ số d có 7 cách chọn. Vậy có $6.7^3 = 2058$ số.

b) Các chữ số là khác nhau đôi một. Lý luận tương tự như trên:

Số các số lập được là: $6.6.5.4 = 864$ số.

5. Xếp ngẫu nhiên 3 nam và 3 nữ ngồi vào 6 ghế xếp thành hàng ngang. Không gian mẫu có: $6! = 720$ cách xếp tùy ý.

a) Nam nữ ngồi xen kẽ nhau sẽ có: $2.(3!).(3!) = 72$ cách.

Vậy xác suất để nam nữ ngồi xen kẽ nhau là: $P(A)=\frac{72}{720}=\frac{1}{10}$.

b) Nam ngồi cạnh nhau sẽ có: $4.(3!).(3!) = 144$ cách.

Vậy xác suất cho biến cố B là nam ngồi cạnh nhau là: $P(B)=\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$.

6. Hộp chứ 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu đen. Lấy ra 4 quả cầu cùng lúc sẽ có:

a) $C_{10}^4=210$ cách lấy. Để 4 quả cầu cùng màu đen thì chỉ có một trường hợp thuận lợi. Để 4 quả cùng màu trắng sẽ có: $C_6^2 = 15$ cách lấy. Số kết quả thuận lợi là 16.

Do đó xác suất của biến cố A là 4 quả cầu cùng màu sẽ là: $P(A)=\frac{16}{210}=\frac{8}{105}$.

b) Trường hợp có 1 quả màu trắng sẽ là: $C_6^1.C_4^3 = 24$;

Trường hợp có 2 quả màu trắng sẽ là: $C_6^2.C_4^2 = 15.6 = 90$;

Trường hợp có 3 quả màu trắng sẽ là: $C_6^3.C_4^1 = 20.4 = 80$;

Trường hợp có 4 quả màu trắng sẽ là: $C_6^4.C_4^0 = 15$.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố có ít nhất 1 quả cầu trắng là 209.

Vậy xác suất cho biến cố B này là: $P(B)=\frac{209}{210}$.

Nói cách khác lấy ra 4 quả cầu mà ít nhất có 1 quả cầu trắng nghĩa là chỉ trừ trường hợp có cả 4 quả màu đen. Nghĩa là chỉ có 1 trường hợp bị trừ. Vậy số trường hợp thuận lợi là : 210 - 1 = 209 $\rightarrow$ $P(B)=\frac{209}{210}$.

7. Gieo 1 con xúc sắc 3 lần. Không gian mẫu gồm $6^3 = 216$ kết quả. Số lần không xuất hiện mặt 6 sẽ là: $5^3 = 125$.

Vậy số trường hợp xuất hiện mặt sáu ít nhất một lần là: 216 - 125 = 91. Do đó xác suất để có biến cố mặt 6 xuất hiện ít nhất 1 lần là: $P(B)=\frac{91}{216}$.

8. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ trong 6 thẻ sẽ có $C_6^2 = 15$ cách. Vậy có 15 đoạn thẳng nối các điểm A, B, C, D, E, F. Vì chỉ có 6 cạnh.

Nên xác suất cho biến cố 2 thẻ đó là đoạn thẳng chỉ cạnh của lục giác: $P_1=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$;

Và xác suất cho biến cố 2 thẻ đó là đoạn thẳng chỉ đường chéo của lục giác: $P_2=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

Xác suất cho biến cố 2 thẻ đó là đoạn thẳng nối 2 đỉnh đối diện: $P_3=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

9. $P(A)=\frac{1}{4};P(B)=\frac{1}{3};P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

a) A và B không xung khắc vì nếu nó xung khắc thì: $P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}\neq\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $P(A\cap\overline{B})=P(A.\overline{B})=P(A).P(\overline{B})=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}.\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

Với giả thiết là biến cố A và biến cố $\overline{B}$ là độc lập với nhau.

Bài tập trắc nghiệm

10. $C_{52}^{2}=1326$. Đáp án B.

11. P(5) = 5! = 120. Đáp án C.

12. $P(B)=\frac{11}{36}$. Đáp án B.

13. $P(A)=\frac{3}{10}=\frac{9}{30}$. Đáp án A.

14. $P(C)=\frac{6}{216}$. Đáp án C.

15. $P(C)=\frac{1}{16}$. Đáp án C.

CHƯƠNG III. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Bài tập

1. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có các đẳng thức:

a) $2+5+8+...+3n-1=\frac{n(3n+1)}{2}$;

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$;

c) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

a) n^3+3n^2+5n chia hết cho 3;

b) $4^n+15n-1$ chia hết cho 9;

c) n^3+11n chia hết cho 6.

3. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có các bất đẳng thức:

a) $3^n > 3n+1$;

b) $2^{n+1} > 2n+3$.

4. Cho tổng $S_n=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính S_1, S_2, S_3;

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

5. Chứng minh số đường chéo của một đa thức lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

6*. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ ta có:

a) $1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

b) $1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

7. Cho các dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n;\quad y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n\ (\forall n \geq 1) \text{ và } x_1^2 = y_1 + 2.$$

Chứng minh rằng $x_n^2 = y_n + 2\ \forall n \geq 1$.

Hướng dẫn giải

1. a) Với n = 1. VT (vế trái) chỉ có một số hạng bằng 2.

$VP = \frac{1(3+1)}{2} = 2$. Vậy đẳng thức đúng với n = 1.

Đặt VT bằng S_n. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$.

Nghĩa là $S_k = 2 + 5 + 8 + ... + 3k - 1 = \frac{k(3k+1)}{2}$ (giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng minh $2 + 5 + 8 + ... + 3n - 1 = \frac{n(3n+1)}{2}$ cũng đúng với n = k + 1.

Tức là $2 + 5 + 8 + ... + 3n - 1 + 3(k+1) - 1 = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$.

Từ giả thiết quy nạp ta có:

$$S_{k+1} = S_k + 3(k+1) - 1 = \frac{k(3k+1)}{2} + 3(k+1) - 1$$

$$= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2} = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}.$$

Vậy đẳng thức đã cho đúng với mọi $n \in N^*$.

b) HS tự chứng minh.

c) • Với n = 1, ta có: $1^2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$ đúng.

Với n = 2, ta có: $1^2 + 2^2 = 5$.

$\frac{2.3.5}{6} = 5$. VT = VP đúng.

• Giả sử đẳng thức đúng với n = k (k ≥ 2), tức là ta có:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với n = k +1, nghĩa là ta có:

$$1^2 + 2^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Thật vậy, ta có: $1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \qquad \text{(đpcm)}$$

Suy ra, đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) • Với n = 1 thì $A_n = n^3 + 3n^2 + 5n = 1 + 3 + 5 = 9$ chia hết cho 3.

Vậy với n = 1 thì $A_1 = 9 \vdots 3$.

• Giả sử với $n = k \geq 1$, thì $A_k = k^3 + 3k^2 + 5k \vdots 3$ (giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 3$.

Thật vậy, ta có:

$A_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 = k^3 + 3k^2 + 5k + 3k^2 + 9k + 9$

$\Rightarrow A_{k+1} = A_k + 3(k^2 + 3k + 3)$, theo giả thiết quy nạp $A_k \vdots 3$,

ta lại có $3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3 \Rightarrow A_{k+1} \vdots 3$.

Vậy $A_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Đặt $A_n = 4^n + 15n - 1$.

• Với n = 1, ta có $A_1 = 4^1 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$.

• Giả sử với $n = k \geq 1$ thì $A_k = 4^k + 15k - 1 \vdots 9$.

Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 9$.

Thật vậy, ta có $A_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4^k.4 + 15k + 14$

$$= 4^k + 15k - 1 + 3.4^k + 15 = A_k + 3(4^k + 5)$$

$A_k \vdots 9$ (giả thiết quy nạp), không khó khăn lắm ta chứng minh được $(4^k + 5) \vdots 3$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3(4^k + 5) \vdots 9.$$

Vậy A_{k+1} chia hết cho 9. Do đó A_n chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Học sinh tự làm.

3. a) • Với n = 2, VT = $3^2 = 9$, VP = 6 + 1 = 7. Bất đẳng thức đúng với n = 2.

• Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là $3^k > 3k + 1$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh $3^{k+1} > 3(k + 1) + 1$.

Thật vậy $3^{k+1} = 3.3^k > 3(3k + 1)$ (theo giả thiết quy nạp)

$$\Rightarrow 3^{k+1} > 9k + 3 = 3(k + 1) + 6k$$

$$\Rightarrow 3^{k+1} > 3(k + 1) + 1 \text{ vì } k \geq 2.$$

Suy ra $3^n > 3n + 1$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

b) • Với n = 2, VT = $2^3 = 8$, VP = 2.2 + 3 =7 $\Rightarrow 8 > 7$, bất đẳng thức đúng với n = 2.

• Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là $2^{k+1} > 2k + 3$ (giả thiết quy nạp).
Ta phải chứng minh bất đẳng đúng với n = k + 1, nghĩa là $2^{(k+1)+1} > 2(k+1) + 3$.

Thật vậy = 2. $2^{k+1} > 2(2k + 3)$ (theo giả thiết quy nạp) nên

$$2^{(k+1)+1} > 4k + 6 > 2(k + 1) + 3 \text{ (do } k \geq 2)$$

Vậy bất đẳng thức $2^{n+1} > 2n + 3$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

4. $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

.....

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Vậy $S_n = \frac{n}{n+1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ (*)

Ta chứng minh công thức này bằng quy nạp.

- Với n = 1 hiển nhiên $S_1 = \frac{1}{2}$ và $VP = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Vậy công thức (*) đúng với n = 1.

- Giả sử (*) đúng với $n = k \geq 1$ tức là $S_k = \frac{k}{k+1}$ (giả thiết quy nạp). Ta phải chứng minh công thức đúng với n = k +1 nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+1+1}$$

Thật vậy $S_{k+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)};$$ (theo giả thiết quy nạp)

Ta có: $S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)} = \frac{k+1}{k+1+1}$$ (đpcm)

Vậy đẳng thức (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Đặt $S_n = \frac{n(n-3)}{2}$ (*)

- Với n = 3 thì đa giác là một đa giác là một tam giác nên số đường chéo bằng 0.

$VT = S_3 = 0$. $VP = \frac{3(3-3)}{2} = 0$. Công thức đúng với n = 3.

• Giả sử công thức đúng với $n = k \geq 3$, tức là $S_k = \frac{k(k-3)}{2}$.

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+1-3)}{2}.$$

Thật vậy, không khó khăn lắm ta chứng minh được một đa giác lồi n cạnh có số đường chéo ít hơn số đường chéo của đa giác lồi n +1 cạnh là (n + 1 - 2) đường chéo.

Vậy $S_{k+1} = S_k + (k - 1)$ mà $S_k = \frac{k(k-3)}{2}$ (theo giả thiết quy nạp).

$$\Rightarrow S_{k+1} = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1-3)}{2} \text{ (đpcm).}$$

Vậy số đường chéo đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

6. a) • Khi n = 1, VT chỉ có một số hạng 1.2 = 2.

$VP = \frac{1}{3}.1.2.3 = 2$. Vậy đẳng thức đã cho đúng với n = 1.

• Đặt VT bằng S_n, giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$ nghĩa là:

$S_k = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + k(k + 1) = \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng chứng minh đẳng thức đã cho cũng đúng với n = k + 1, nghĩa là:

$$S_{k+1} = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + (k + 1)(k + 2) = \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3)$$

Thật vậy $S_{k+1} = S_k + (k + 1)(k + 2)$. Theo giả thiết quy nạp : $S_k = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2)$,

nên ta có : $S_{k+1} = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2) + (k + 1)(k + 2)$.

$$= \frac{1}{3}[k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)]$$

$$= \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3) \text{ (đpcm)}$$

Do đó đẳng thức đã cho đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Học sinh tự làm.

7. • Với n = 1: Hiển nhiên đúng theo giả thiết.

• Giả sử bài toán đúng với n = k ($k \geq 1$) tức là $x_k^2 = y_k + 2$. Ta phải chứng minh bài toán đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh $x_{k+1}^2 = y_{k+1} + 2$.

Thật vậy: $x_{k+1}^2 = (x_k^3 - 3x_k)^2 = x_k^6 - 3x_k^4 + 9x_k^2$

$= (y_k + 2)^3 - 6(y_k + 2)^2 + 9(y_k + 2)$

$= y_k^3 - 3y_k + 2 = y_{k+1} + 2$. Bài toán được chứng minh.

§2. DÃY SỐ

Bài tập

1. Viết năm số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức:

a) $u_n = \frac{n}{2^n - 1}$; b) $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$;

c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; d) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

2. Cho dãy số (u_n) biết: $u_1 = -1$, $u_{n+1} = u_n + 3$ với $n \geq 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp: $u_n = 3n - 4$.

3. Dãy số (u_n) cho bởi: $u_1 = 3$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$, $n \geq 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

4. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = \frac{1}{n} - 2$; b) $u_n = \frac{n - 1}{n + 1}$ c) $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$; d) $u_n = \frac{2n + 1}{5n + 2}$.

5. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn? Biết:

a) $u = 2n^2 - 1$ b) $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$;

c) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$; d) $u_n = \sin x + \cos n$

6*. Cho dãy số ($u_n = \frac{1}{n(n+1)}$). Thiết lập dãy số $\{S_n\}$ mà

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n.$$

7. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số: 2; 4; 7; 11; 16; ... và chứng minh công thức đó bằng quy nạp.

8. Chứng minh rằng dãy số ($u_n = \cos\frac{n\pi}{2}$) bị chặn.

9. Chứng minh rằng dãy số : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$ $(n \geq 1)$

là dãy số giảm và bị chặn dưới.

Hướng dẫn giải

1. a) $u_n = \frac{n}{2^n - 1}$: $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{7}; u_4 = \frac{4}{15}; u_5 = \frac{5}{31}$.

b) Học sinh tự làm.

c) $u_1 = 2; u_2 = \frac{9}{4}; u_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}; u_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4; u_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5$.

d) $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; u_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}; u_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}; u_4 = \frac{4}{\sqrt{17}}; u_5 = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

2. a) $u_1 = -1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 5$, $u_4 = 8$, $u_5 = 11$.

b) Chứng minh $u_n = 3n - 4$.

• Với $n = 1$, VT = $u_1 = -1$ (gt), VP = $3.1 - 4 = -1$.

VT = VP với $n = 1$. Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

• Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $u_k = 3k - 4$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với n = k +1, nghĩa là $u_{k+1} = 3(k+1) - 4$.

Thật vậy: $u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 4 + 3$ (theo giả thiết quy nạp).

$= 3(k+1) - 4$ (đpcm).

Vậy $u_n = 3n - 4$ đúng với $n \geq 1$.

3. a) $u_1 = 3$; $u_2 = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$; $u_3 = \sqrt{1+\left(\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{11}$;

$$u_4 = \sqrt{1+\left(\sqrt{11}\right)^2} = \sqrt{12}; u_5 = \sqrt{1+\left(\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{13}.$$

b) Từ đó suy ra $u_n = \sqrt{n+8}$, với $n \in N^*$. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

• Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 3$ (gt), $\sqrt{n+8} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$.

Vậy công thức đúng với n = 1.

• Giả thiết công thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là $u_k = \sqrt{k+8}$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh $u_{k+1} = \sqrt{k+1+8}$.

Thật vậy, theo đề bài $u_{k+1} = \sqrt{1+u_k^2} = \sqrt{1+\left(\sqrt{k+8}\right)^2}$ (giả thiết quy nạp)

$$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{k+8+1} = \sqrt{k+1+8} \text{ (đpcm)}$$

Vậy công thức $u_n = \sqrt{n+8}$ đúng với mọi $n \geq 1$.

4. a) Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy số giảm, thật vậy :

Xét với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - 2 - \left(\frac{1}{n} - 2\right) = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$.

b) Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy số tăng, thật vậy:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó $u_{n+1} > u_n$.

c) Dãy số $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$: $-3, -5, -9, 17, \ldots$ là dãy số không tăng, không giảm. Vậy dãy số này không đơn điệu.

d) Dãy số $u_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$ là dãy giảm. Xét $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(5n+2)(5n+7)} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n.$$

5. a) $u_n = 2n^2 - 1$ thì $u_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) bị chặn dưới.

b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$ thì $u_n \leq \dfrac{1}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $0 < u_n \leq \dfrac{1}{3}$. Vậy (u_n) bị chặn.

c) $u_n = \dfrac{1}{2n^2 - 1}$ thì $0 < u_n \leq 1$. Vậy (u_n) bị chặn.

d) $u_n = \sin n + \cos n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - n\right) + \cos n = 2\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - n\right) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - n\right)$

$\Rightarrow |u_n| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq u_n \leq \sqrt{2}$. Vậy (u_n) bị chặn.

6. Có $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

7. Ta có:

$u_1 = 1 + 1$

$u_2 = u_1 + 2$

$+ \quad u_3 = u_2 + 3$

$u_4 = u_3 + 4$

$u_5 = u_4 + 5$

.....

$u_{n+1} = u_n + n$

$$u_n = 1 + \frac{1+n}{2}n \Rightarrow u_n = 1 + \frac{n(1+n)}{2}$$

Ta chứng minh công thức này bằng quy nạp.

• Với n = 1, ta có VT = $u_1 = 2$ (gt). VP = $1 + \frac{1(1+1)}{2} = 2$.

Vậy công thức đúng với n = 1.

• Giả sử công thức đúng với n = k ≥ 1, tức là $u_k = 1 + \frac{k(1+k)}{2}$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh $u_{k+1} = 1 + \frac{(k+1)(1+k+1)}{2}$.

Thật vậy: $u_{k+1} = u_k + k + 1 = 1 + \frac{k(1+k)}{2} + k + 1$.

$$= 1 + \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = 1 + \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ (đpcm).}$$

Vậy: $u_n = 1 + \frac{n(1+n)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

8. $u_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ do $\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right| \le 1$ nên $|u_n| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le u_n \le 1$, suy ra (u_n) bị chặn.

9. Từ biểu thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$

Ta có dãy: $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{2+1}{2}$; $u_3 = \frac{3+1}{4}$,... . Ta suy ra $u_n = 1 + 2^{1-n}$. Ta chứng minh công thức này bằng quy nạp.

• Với n = 1, VP = $u_1 = 2$ (gt), VT = $1 + 2^0 = 2$.

Vậy với n = 1 công thức đúng.

• Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $u_k = 1 + 2^{1-k}$ (giả thiết quy nạp). Ta phải chứng minh $u_{k+1} = 1 + 2^{1-(k+1)}$.

Thật vậy $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} = \frac{1 + 2^{1-k} + 1}{2} = \frac{2(2^{1-k-1} + 1)}{2} = 1 + 2^{1-(k+1)}$ (đpcm).

Vậy công thức $u_n = 1 + 2^{1-n}$ đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$u_{n+1} = 1 + 2^{1-(n+1)} = 1 + 2^{-n}$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 1 + 2^{-n} - (1 + 2^{1-n}) = 2^{-n} - 2^{1-n} = 2^{-n}(1 - 2) = -2^{-n} < 0$.

Vậy $u_{n+1} < u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy dãy số đã cho là dãy giảm.

$u_n = 1 + 2^{1-n} > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy u_n bị chặn dưới.

§3. CẤP SỐ CỘNG

Bài tập

1. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó, biết: a) $u_n = 5 - 2n$; b) $u_n = \frac{n}{2} - 1$;

c) $u_n = 3^n$; d) $u_n = \frac{7 - 3n}{2}$.

2. Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau, biết:

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$.

3. Trong các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp năm đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n.

a) Hãy viết các hệ thức liên hệ giữa các đại lượng đó. Cần phải biết ít nhất mấy đại lượng để có thể tìm được các đại lượng còn lại?

b) Lập bảng theo mẫu sau và điền số thích hợp vào ô trống.

u_1	d	n	u_n	S_n
– 2		55	20	
	– 4		15	120
3	$\frac{4}{27}$	7		
		17	12	72
2	– 5			– 205

4. Mặt sàn tầng một của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5m.

Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, mỗi bậc cao 18cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của các bậc tùy ý so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

5. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng, nếu nó chỉ đánh chuông báo số giờ?

6*. Tìm sự liên hệ giữa a, b, c để PT: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm lập thành CSC (CSC: cấp số cộng).

7. Giải các PT sau:

a) $2 + 5 + 8 + ... + x = 155$; b) $(x - 1) + (x - 3) + ... + (x - 27) = 70$.

8. Tìm tổng tất cả các số có hai chữ số, không chia hết cho 3 và cho 5.

9. Tìm CSC biết tổng bốn số hạng đầu bằng 68, tổng bốn số hạng sau cùng bằng – 36, tổng tất cả các số hạng bằng 68.

10. Tổng n số hạng đầu của CSC bằng nửa tổng n số hạng tiếp theo. Tìm tỉ số của tổng 3n số hạng đầu với tổng n số hạng đầu của CSC đó.

11. Tìm a để phương trình $\cos x = a$ có các nghiệm lập thành CSC.

Hướng dẫn giải

1. a) $u_n = 5 - 2n$; $u_{n-1} = 5 - 2(n-1) = 7 - 2n$

$u_n - u_{n-1} = 5 - 2n - (7 - 2n) = -2$

Vậy dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 3$, $d = -2$.

b) $u_n = \frac{n}{2} - 1$, $u_{n-1} = \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$.

$u_n - u_{n-1} = \frac{n}{2} - 1 - \frac{n-3}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy dãy số (u_n) cũng là một cấp số cộng với $u_1 = -\frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{2}$.

c) $u_n = 3^n$, $u_{n-1} = 3^{n-1} = \frac{1}{3}.3^n$; $u_n - u_{n-1} = 3^n - \frac{1}{3}.3^n = \frac{2}{3}3^n$.

Vậy dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng.

d) $u_n = \frac{7-3n}{2}$; $u_{n-1} = \frac{7-3(n-1)}{2} = \frac{10-3n}{2}$

$u_n - u_{n-1} = \frac{7-3n}{2} - \frac{10-3n}{2} = -\frac{3}{2}$.

Vậy (u_n) cũng là một cấp số cộng với $u_1 = 2$, $d = -\frac{3}{2}$.

2. a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d - (u_1 + 2d) = 8 \ (1) \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \ (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có : $4d = 8 \Leftrightarrow d = 2$. Thay $d = 2$ vào (2)

Ta có : $(u_1 + 2)(u_1 + 12) - 75 = 0 \Leftrightarrow u_1^2 + 14u_1 + 24 - 75 = 0$

$$u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{bmatrix}.$$

Vậy ta có hai cấp số cộng thoả mãn bài toán: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2 \end{cases}$;

Cụ thể là: ÷ 3, 5, 7, ...

÷ −17, −15, −13, ...

3. a) $u_n = u_1 + (n - 1)d \quad (n \geq 2)$ (1)

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \qquad (2)$$

Trong mối liên hệ của 5 đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n biểu diễn bởi hai công thức cơ bản trên. Chẳng hạn, ở công thức (1)

Muốn tính u_n phải biết u_1, d, n. Muốn tính u_1 phải biết u_n, d, n.

Như vậy muốn tính một trong năm đại lượng trên phải biết ít nhất ba đại lượng.

b)

u_1	d	u_n	n	S_n
− 2	3	55	20	530
36	− 4	− 20	15	120
3	$\frac{4}{27}$	7	28	140
− 5	2	17	12	72
2	− 5	− 43	10	− 205

4. a) Nếu gọi độ cao so với mặt sân của bậc thứ nhất, thứ hai, thứ ba, ... của cầu thang là u_1, u_2, u_3, ..., u_{21} thì ta có:

$u_1 = 50 + 18 = 68$ (cm)

$u_2 = 68 + 18 = 86$ (cm)

$u_3 = 86 + 18 = 104$ (cm)

Như vậy u_1, u_2, u_3, ... là một cấp số cộng:

÷ 68, 86, 104, ... Rõ ràng $u_1 = 68$, $d = 18$.

Nên $u_n = 68 + (n - 1)18$

$u_n = 50 + 18n$ là công thức tính độ cao bậc tuỳ ý so với mặt sân.

Độ cao của tầng hai so với mặt sân chính là độ cao của bậc 21 so với mặt sân. Mà $u_{21} = 68 + (21 - 1)18 = 428$ (cm) = 4.28m.

Vậy độ cao của tầng hai so với mặt sân là 4,28m.

5. Số tiếng chuông điểm trong mỗi giờ (loại chuông chỉ đánh chuông báo giờ) từ 0 giờ đến 12 giờ trưa ta có dãy số sau:

1, 2, 3, ..., 12. Dãy số này là một cấp số cộng có $u_1 = 1$, $d = 1$,

$u_{12} = 12$, $n = 12$.

Tổng số tiếng chuông đã đánh từ 0 giờ đến 12 giờ trưa chính là S_{12}.

$$S_{12} = \frac{12(u_1 + u_{12})}{2} = (1+12).6 = 78 \text{ (tiếng chuông).}$$

6. Gọi các nghiệm là $x_1 < x_2 < x_3$. Ta có $\div x_1, x_2, x_3$. Theo định lý Viet cho phương trình bậc ba:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b & (2) \\ x_1x_2x_3 = -c & (3) \end{cases}$$

Theo tính chất của cấp số cộng: $x_1 + x_3 = 2x_2$ nên (1) cho ta $x_2 = -\frac{a}{3}$. Thay x_2 vào hệ trên ta được hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -\frac{2}{3}a \\ x_1x_3 = b - \frac{2a^2}{9} \\ x_1x_3 = \frac{3c}{a} \end{cases}$$

Suy ra x_1 và x_3 là nghiệm của phương trình: $Z^2 + \frac{2}{3}aZ + b^2 - \frac{2a^2}{9} = 0$.

Phương trình này phải có hai nghiệm khác nhau nên: $\Delta' > 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(a^2 + 3b) > 0$.

Mặt khác x_2 là một nghiệm của phương trình đã cho, nên:

$$\left(-\frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(-\frac{1}{3}a\right) + c = 0 \Leftrightarrow 2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

Vậy sự liên hệ giữa các hệ số a, b, c để phương trình

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng là:

$$\begin{cases} 2a^3 - 9ab + 27c = 0 \\ a^2 > 3b \end{cases}$$

7. a) VT là tổng n số hạng đầu của CSC mà $u_1 = 2$, $d = 3$. Theo công thức

$$S_n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} n \Rightarrow 155 = \frac{4 + 3(n-1)}{2} n$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + n - 310 = 0 \Rightarrow n = 10.$$

Ta có: $x = u_n = u_1 + (n-1)d = 2 + 9.3 = 29$

b) Viết lại phương tình đã cho: $nx - \underbrace{(1 + 3 + ... + 27)}_{\text{n số hạng}} = 70$

Trong dấu ngoặc là CSC có $u_1 = 1$, $d = 2$, $u_n = 27$.

Mà $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow n = 14$.

Vậy $14x = 70 + \frac{1+27}{2}14 \Leftrightarrow 14x = 266 \Leftrightarrow x = 19$.

8. Gọi S_1 là tổng các số có hai chữ số: $S_1 = \frac{10+99}{2}.90 = 4905$.

Gọi S_2 là tổng tất cả các số có hai chữ số chia hết cho 3: $S_2 = \frac{12+99}{2}.30 = 1665$

Gọi S_3 là tổng tất cả các số có hai chữ số chia hết cho 5: $S_3 = \frac{10+95}{2}.18 = 945$.

Gọi S_4 là tổng tất cả các số có hai chữ số chia hết cho 15: $S_4 = \frac{15+90}{2}.6 = 315$.

Theo đầu bài số phải tìm là: $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$

$$S = 2610.$$

9. Ta có: (I) $\begin{cases} \frac{2u_1 + 3d}{2}.4 = 68 \\ \frac{2u_n - 3d}{2}.4 = -36 \end{cases} \Rightarrow u_1 + u_n = 8$

Ta cũng có: $\frac{u_1 + u_n}{2}.n = 68 \Rightarrow n = 17$ và $u_n = u_{17} = u_1 + 16d$.

Hệ (I) cho ta $\begin{cases} 2u_1 + 3d = 34 \\ 2u_1 + 29d = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 20 \\ d = -2 \end{cases}$

Vậy ta có cấp số cộng: 20, 18, 16, ...

10. Theo đầu bài $S_n = \frac{1}{2}(S_{2n} - S_n) \Leftrightarrow 3S_n = S_{2n}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}[2u_1 + (n-1)d]n = \frac{1}{2}[2u_1 + (2n-1)d]2n \Leftrightarrow 2u_1 = (n+1)d$$

Ta phải tìm: $\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{[2u_1 + (3n-1)d]\frac{3}{2}n}{[2u_1 + (n-1)d]\frac{n}{2}} = \frac{(n+1)d + (3n-1)d}{(n+1)d + (n-1)d} = 6.$

11. Đường thẳng y =a song song với trục hoành cắt đồ thị y = cosx tại các điểm mà hoành độ của chúng cách đều nhau.

ĐS: $a = \pm 1, a = 0.$

§4. CẤP SỐ NHÂN

Bài tập

1. Chứng minh các dãy số $\left(\frac{3}{5}.2^n\right), \left(\frac{5}{2^n}\right), \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ là các cấp số nhân.

2. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q.

a) Biết $u_1 = 2, u_6 = 486$. Tìm q ; b) Biết $q = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm u_1.

c) Biết $u_1 = 3, q = -2$. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy ?

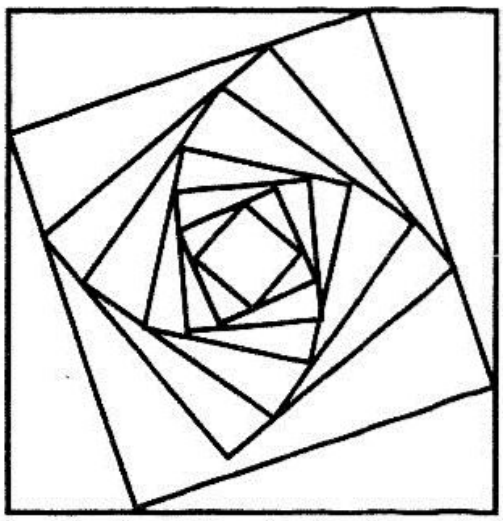
3. Tìm các số hạng của cấp số nhân có năm số hạng, biết :

a) $u_1 = 3, u_5 = 27$; b) $u_5 - u_2 = 25$ và $u_3 - u_1 = 50$.

4. Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng sau là 62.

5. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu người, hỏi với mức tăng như vậy thì sau 5 năm, 10 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu ?

6. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia các cạnh của hình vuông thành 4 phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (hình 17). Từ hình vuông C_2 lại tiếp như trên để diện tích hình vuông C_3, ... Tiếp tục quá trình trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$



Hình 17

Gọi a_n là độ dài cạnh của hình vuông C_n. Chứng minh dãy số (a_n) là một cấp số nhân.

7*. Cho ba số có tổng bằng 21 lập thành cấp số cộng. Nếu số hạng thứ hai bớt đi 1, thêm 1 vào số hạng thứ ba thì được ba số theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Tìm cấp số nhân.

8. Cho ba số có tổng bằng 28 lập thành cấp số nhân (CSN). Nếu số thứ nhất giảm đi 4 thì ta được ba số theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm CSN.

9. Tổng ba số hạng đầu của một CSN có 6 số hạng bằng 42. Các số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba của CSN này là ba số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ sáu của CSC. Tìm CSN.

10. Cho tam giác ABC có $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ A, B, C công bội 2. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (a, b, c là độ dài các cạnh theo thứ tự đối diện với góc A, B, C).

11. Tìm x biết sinx, $\sin\frac{3x}{2}$, sin3x theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân.

Hướng dẫn giải

1. a) $u_n = \frac{3}{5}.2^n$, $u_{n-1} = \frac{3}{5}.2^{n-1} \Rightarrow u_n : u_{n-1} = \frac{3}{5}.2^n : \frac{3}{5}.2^{n-1} = 2^{n-(n-1)} = 2$.

Vậy $(u_n) = \left(\frac{3}{5}.2^n\right)$ là cấp số nhân có q = 2.

b) Tương tự $\left(\frac{5}{2^n}\right)$ là cấp số nhân có $q = \frac{1}{2}$.

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ là cấp số nhân với $q = -\frac{1}{2}$.

2. a) $u_1 = 2$, $u_6 = 486 = u_1q^5$, suy ra $q^5 = \frac{u_6}{u_1}$; $q^5 = \frac{486}{2} = 243 = 3^5 \Rightarrow q = 3$.

b) $u_4 = u_1.q^3 \Rightarrow \frac{8}{21} = u_1\left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow u_1 = \frac{8}{21} : \frac{8}{27} \Rightarrow u_1 = \frac{27}{21} = \frac{9}{7}$;

c) $u_4 = u_1q^{n-1}$, thay số ta có : $192 = 3(-2)^{n-1} \Rightarrow (-2)^{n-1} = 64 = (-2)^6$

$$\Leftrightarrow n - 1 = 6 \Leftrightarrow n = 7.$$

Như vậy số 192 là số hạng thứ 7.

3. a) $u_5 = u_1q^2 \Rightarrow q^2 = u_5 : u_3$

$$q^2 = 9 = 3^2 \Leftrightarrow q = \pm 3.$$

$u_3 = u_1q^2 \Rightarrow u_1 = u_3 : q^2$

$$u_1 = 3 : 9 = \frac{1}{3}$$

• Với $q = 3$, ta có cấp số nhân

$$\frac{1}{3}; 1; 3; 9; 27;$$

• Với $q = -3$, ta có cấp số nhân

$$\frac{1}{3}; -1; 3; -9; 27;$$

b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^3 - q) = 25 \\ u_1(q^2 - 1) = 50 \end{cases} \Rightarrow \frac{q(q-1)(q+1)}{(q-1)(q+1)} = \frac{25}{50} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{25}{\frac{1}{8} - \frac{1}{2}} = \frac{25}{-\frac{3}{8}} \Rightarrow u_1 = \frac{-25.8}{3} = -\frac{200}{3}$$

Ta có CSN: $\therefore -\frac{200}{3}, -\frac{100}{3}, -\frac{50}{3}, -\frac{25}{3}, -\frac{25}{6}$.

4. Gọi cấp số nhân phải tìm là: $\therefore u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, công bội q. Theo đề bài ta có: $S_5 = u_1 + u_2 + ... + u_5 = 31$

$S_5' = u_2 + u_3 + ... + u_6 = 62$

$S_5 = \frac{u_1(1-q^5)}{1-q} = 31$; $S_5' = = \frac{u_1 q(1-q^5)}{1-q} = 62$

$\Rightarrow \frac{S_5'}{S_5} = q = 2 \Rightarrow u_1 = 1$.

Vậy ta có CSN: $\therefore$ 1, 2, 4, 8, 16, 32.

5. Gọi số dân của tỉnh X theo thứ tự: sau một năm, sau hai năm, ..., sau n năm là $u_1, u_2, ..., u_n$.

$u_1 = 1,8 \times 0,014 + 1,8 = 1,8(1 + 0,014)$ (triệu người)

$u_2 = 1,8(1 + 0,014) \times 0,014 + 1,8(1 + 0,014)$

$= [1,8(1 + 0,014)] (1 + 0,014)$

$= 1,8(1 + 0,014)^2 = 1,8(1,14)^2$

$u_3 = 1,8(1 + 0,014)^3 = 1,8(1,14)^3$

.....

$u_n = 1,8(1 + 0,014)^n = 1,8(1,14)^n$.

Dễ dàng chứng minh công thức này đúng bằng quy nạp. Như vậy dãy số này là cấp số nhân có $u_1 = 1,8(1,014)$ (triệu người), $q = 1,014$.

Vậy sau 5 năm số dân của tỉnh X là : $u_5 = 1,8(1,014)^5 \approx 1,9$ (triệu người).

Sau 10 năm số dân của tỉnh X là : $u_{10} = 1,8(1,14)^{10} \approx 2,1$ (triệu người).

6. Gọi cạnh hình vuông C_1 là a_1, vậy $a_1 = 4$. Cạnh hình vuông C_2 là a_2 thì

$a_2 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a_1}{4}\right)^2} = \frac{a_1}{4}\sqrt{10}$; $a_3 = \frac{a_2}{4}\sqrt{10}$; ...; $a_{n+1} = \frac{a_n}{4}\sqrt{10}$.

Vậy ta có công thức truy hồi: $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4}\sqrt{10} \ (\text{với } n \geq 1) \end{cases}$

Như vậy, dãy này là cấp số nhân với $u_1 = 4$, $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

7. Tóm tắt đề bài: $\div u_1, u_2, u_3$,

$\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $u_1, u_2 - 1, u_3 + 1$

Theo tính chất của CSC: $u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow u_1, u_2, u_3 = 3u_2$

$\Leftrightarrow 3u_2 = 21 \Leftrightarrow u_2 = 7.$

Theo tính chất của CSN: $u_1(u_3 + 1) = (u_2 - 1)^2 \Leftrightarrow u_3(u_1 + 1) = 36$ (*)

Do $u_2 = 7 \Rightarrow u_1 + u_3 = 14 \Rightarrow u_3 = 14 - u_1$

Thay vào (*) ta có : $u_1(15 - u_1) = 36 \Leftrightarrow u_1^2 - 15u_1 + 36 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = 12 \end{array}\right.$. Như vậy có hai cấp số nhân :

$\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 3, 6, 12; $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 12, 6, 3.

8. Tóm tắt đề bài: $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ u_1, u_2, u_3 và $u_1 + u_2 + u_3 = 28$ (1)

$\div u_1 - 4, u_2, u_3.$

Theo tính chất của CSC: $u_1 - 4 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 - 4 = 3u_2$

$\Leftrightarrow 3u_2 = 28 - 4 = 24 \Leftrightarrow u_2 = 8.$

Theo tính chất của CSN : $u_1.u_3 = u_2^2 = 64$ (2)

$u_1 + u_3 = 20$. Vậy u_1, u_3 là nghiệm của phương trình bậc hai :

$X^2 - 20X + 64 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 16 \\ X = 4 \end{array}\right.$

Nên ta có $\begin{cases} u_1 = 16 \\ u_3 = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_3 = 16 \end{cases}$;

Vậy ta có hai CSN : $\therdot$ 4, 8, 16; $\therdot$ 16, 8, 4.

9. Tóm tắt đề bài : $\therdot$ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$,và $u_1 + u_2 + u_3 = 42$

$\div a_1, a_2, a_6$

Có : $\begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_2 = u_2 \\ a_6 = u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 \\ u_1 q = a_1 + d \\ u_1 q^2 = a_1 + 5d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1(q-1) = d \\ u_1(q^2-1) = 5d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 42 \\ \dfrac{q-1}{q^2-1} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 42 \\ \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 42 \\ q = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 4 \end{cases}$

Vậy ta có cấp số nhân : $\therdot$ 2, 8, 32, ..., 2.4^{n-1}, ...

10. Theo giả thiết ta có: B = 2A, C = 2B = 4A

mà $A + B + C = \pi \Rightarrow 7A = \pi \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{7} \Rightarrow B = \dfrac{2\pi}{7}, C = \dfrac{4\pi}{7}$

Theo định lý hàm số sin: $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2R\sin\dfrac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{2R\sin\dfrac{4\pi}{7}} = \dfrac{1}{2R} \cdot \dfrac{\sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}.\sin\dfrac{4\pi}{7}}$

$= \dfrac{1}{2R} \dfrac{2\sin\dfrac{3\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}}{2\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{4\pi}{7}} = \dfrac{1}{2R\sin\dfrac{\pi}{7}} \quad \left(\sin\dfrac{3\pi}{7} = \sin\dfrac{4\pi}{7}\right)$

Vậy $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2R\sin\dfrac{\pi}{7}} \Rightarrow \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a}$.

11. $\sin x, \sin\frac{3x}{2}, \sin 3x$. Rõ ràng $\sin x \neq 0, \sin\frac{3x}{2}, \sin 3x \neq 0$.

Theo tính chất của CSN:

$$\sin x.\sin 3x = \sin^2\frac{3x}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin\frac{3x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 4\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{3x}{2} \Leftrightarrow 3 - 4\sin^2\frac{x}{2} = 4\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2(1 - \cos x) = 2(\cos 2x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\cos 2x = 2\cos 2x + 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Khi nào thì cấp số cộng là dãy số tăng, dãy số giảm?

2. Cho cấp số nhân có $u_1 < 0$ và công bội q.

Hỏi các số hạng khác sẽ mang dấu gì trong các trường hợp sau:

a) $q > 0$; b) $q < 0$.

3. Cho hai cấp số cộng có cùng số các số hạng. Tổng các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số cộng không? Vì sao? Cho một ví dụ minh hoạ.

4. Cho hai cấp số nhân có cùng số các số hạng. Tích các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số nhân không ? Vì sao ? Cho một ví dụ minh hoạ.

5. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có :

a) $13^n - 1$ chia hết cho 6 ; b) $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9.

6. Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$ (với $n \geq 1$).

a) Viết năm số hạng đầu của dãy ;

b) Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp.

7. Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số sau, biết :

a) $u_n = n + \frac{1}{n}$; b) $u_n = (-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n}$; c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

8. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của các cấp số cộng sau, biết :

a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ s_4 = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$.

9. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân sau, biết :

a) $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$; c) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases}$.

10. Tứ giác ABCD có các số đo góc lập thành một cấp số nhân theo thứ tự A, B, C, D. Biết rằng góc C gấp bốn lần góc A. Tính các góc của tứ giác.

11. Biết rằng ba số x, y, z lập thành một cấp số nhân và ba số x, 2y, 3z lập thành một cấp số cộng. Tìm công bội của cấp số nhân.

12. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích mỗi tầng bằng nửa diện tích của tầng ngay bên dưới. Biết diện tích mặt đế tháp là $12288m^2$, tính diện tích tầng trên cùng.

13. Chứng minh rằng nếu các số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng thì các số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài tập trắc nghiệm

14. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Hãy chọn phương án đúng :

a) Số hạng u_{n+1} bằng :

(A) $3^n + 1$; (C) $3^n.3$;

(B) $3^n + 3$; (D) $3(n + 1)$.

b) Số hạng u_{2n} bằng:

(A) 2.3^n ; (C) $3^n + 3$;

(B) 9^n ; (D) $6n$.

c) Số hạng u_{n-1} bằng :

(A) $3^n - 1$; (B) $\frac{1}{3}3^n$;

(C) $3^n - 3$; (D) $3n - 1$.

d) Số hạng u_{2n-1} bằng:

(A) $3^2.3^n - 1$; (C) $3^{2n} - 1$;

(B) $3^n.3^{n-1}$; (D) 3^{2n-1}.

15. Dãy số (u_n) nào dưới đây là dãy số tăng ? Nếu biết công thức số hạng tổng quát u_n của nó là:

(A): $u_n = (-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n}$;

(B): $u_{n+1} = (-1)^{2n}(5^n + 1)$;

(C): $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$;

(D) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

16. Cho cấp số cộng : $\div -2, x, 6, y$.

Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả dưới đây :

(A): $x = -6; y = -2$;

(B): $x = 1; y = 7$;

(C): $x = 2; y = 8$;

(D): $x = 2; y = 10$.

17. Cho cấp số nhân: $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} -4, x, -9$.

Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả dưới đây:

(A): $x = 36$;

(B): $x = -6,5$;

(C): $x = 6$;

(D): $x = -9$.

18. Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau đây :

(A): $\frac{u_{10} + u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$;

(B): $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$;

(C): $u_{10}.u_{30} = u_{20}$;

(D) : $\frac{u_{10} + u_{30}}{2} = u_{20}$.

19. Trong các dãy số cho bởi các công thức truy hồi sau đây, hãy chọn dãy số là cấp số nhân.

(A): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$;

(B): $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$;

(C): $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$; (D): $7, 77, 777, ..., \underbrace{777...7}_{n \text{ chữ số } 7}$.

20*. Trong tam giác ABC, nếu có :

a) ÷ $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ thì có ÷ cosA, cosB, cosC;

b) ÷ $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ thì có ÷ a, b, c;

c) ÷ $\sin A.\sin B = 3\sin^2\frac{C}{2}$ thì có ÷ a, c, b;

d) ÷ sin(B + C − A), sin(C + A − B), sin(A + B − C) thì có ÷ tanA, tanB, tanC.

21. Cho cấp số cộng ÷ $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$. Chứng minh rằng :

$$S = \frac{1}{u_1.u_2} + \frac{1}{u_2.u_3} + \frac{1}{u_3.u_4} + ... + \frac{1}{u_{n-1}.u_n} = \frac{n-1}{u_1.u_n}.$$

22. Cho S_n là tổng n số hạng đầu của các cấp số nhân ($S_n \neq 0$, $q \neq 0$, $q \neq 1$). Chứng minh: $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}$.

23. Tìm số hạng thứ m và số hạng thứ n của một CSN biết số hạng thứ (m + n) bằng A, số hạng thứ (m − n) bằng B và các số hạng đều dương.

24. Hãy chứng minh : Trong tam giác ABC nếu cotA, cotB, cotC theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng lập thành cấp số cộng.

(Trích đề thi ĐH Thương Mại - 2000).

Hướng dẫn giải

1. Cấp số cộng là dãy số tăng khi $d > 0$, dãy số giảm khi $d < 0$.

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1.q^{n-1}$.

a) $u_1 < 0$, $q > 0$ thì tất cả các số hạng đều âm ($u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$).

b) $u_1 < 0$, $q > 0$ thì $u_2 > 0$, $u_4 > 0$, $u_8 > 0$. Những số hạng có thứ tự là số chẵn mang dấu "+", các số hạng có thứ tự là số lẻ mang dấu "−".

Vậy các số hạng đan dấu với $u_1 < 0$.

3. Cho 2 cấp số cộng: $\div u_1, u_1 + d, u_1 + 2d, ..., u_1 + (n-1)d, ...$

$\div a_1, a_1 + d', a_1 + 2d', ..., a_1 + (n-1)d', ...$

Tổng các số hạng tương ứng của chúng:

$u_1 + a_1, u_1 + a_1 + (d + d'), u_1 + a_1 + 2(d + d'), ..., u_1 + a_1 + (n-1)(d + d'), ...$

Rõ ràng dãy số này là một cấp số cộng có $\overline{u}_1 = u_1 + a_1$, $\overline{d} = d + d'$.

(Tất nhiên ở đây là cấp số cộng phải có cùng số các số hạng).

Ví dụ : $\div 1, 2, 3, ..., n, ...$ $u_1 = 1, d = 1;$

$\div 1, 3, 5, ..., 2n - 1, ...$ $u_1 = 1, d = 2.$

Rõ ràng ta có cấp số cộng sau: $\div 2, 5, 8, ..., 3n - 1, ...$

4. Cho hai cấp số nhân: $\dot{\div}$ $u_1, u_1q, u_1q^2, ..., u_1q^{n-1}, ...$

$\dot{\div}$ $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{n-1}, ...$

Tích các số hạng tương ứng của chúng ta có dãy số:

$u_1a_1, u_1a_1(q.q'), u_1a_1(q.q')^2, ..., u_1a_1(q.q')^{n-1}.$

Rõ ràng dãy số này là cấp số nhân với $\overline{u}_1 = u_1q_1$, $\overline{q} = q.q'$.

(Tất nhiên ở đây hai cấp số nhân phải có cùng số các số hạng).

Ví dụ : $\dot{\div}$ $1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1}, ...$

$\dot{\div}$ $1, 3, 9, 27, ..., 3^{n-1}, ...$

$\dot{\div}$ $1, 6, 36, 216, ..., 6^{n-1}, ...$ (Nhân các số hạng tương ứng)

$u_1 = 1, q = 6.$

5. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

a) Đặt $A_n = 13^n - 1.$

• Với n = 1 ta có $A_1 = 13 - 1 = 12 \Rightarrow A_1 \vdots 6$.

• Giả sử bài toán đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là ta có $A_k = 13^k - 1 \vdots 6$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh bài toán đúng với n = k + 1, tức là: $A_{k+1} = 13^{k+1} - 1 \vdots 6$.

Thật vậy $A_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13.13^k - 1 = 13^k - 1 + 12.13^k$

mà $13^k - 1 \vdots 6$ (giả thiết quy nạp), $12.13^k \vdots 6$.

Vậy suy ra $A_{k+1} = 13^{k+1} - 1 \vdots 6$. Do đó $13^n - 1$ chia hết cho 6, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Chứng minh tương tự như a). Học sinh tự làm.

6. a) 2, 3, 5, 9, 17.

b) Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp.

• Với n = 1, $u_1 = 2^0 + 1 = 2$. Rõ ràng dãy số trên có $u_1 = 2$. Như vậy công thức đúng với n = 1.

• Giả sử công thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là $u_k = 2^{k-1} + 1$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh công thức đúng với n = k + 1 nghĩa là $u_{k+1} = 2^{k+1-1} + 1$.

Thật vậy, theo giả thiết của bài toán:

$$u_{k+1} = 2u_k - 1 = 2(2^{k-1} - 1) - 1 = 2^k - 1 \text{ (Theo giả thiết quy nạp).}$$

Nên $u_{k+1} = 2^{k+1-1} + 1$ (đpcm).

Do đó công thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

7. a) $u_n = n + \frac{1}{n}$; $u_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{n+1}$.

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + \frac{1}{n+1} - \left(n + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy đã cho là dãy số tăng.

Ta lại có $u_n = n + \frac{1}{n} \Rightarrow u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) bị chặn dưới.

b) $u_n = (-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$. Rõ ràng dãy số này không đơn điệu.

Do $\left|\sin\frac{1}{n}\right| \le 1 \Rightarrow |u_n| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le u_n \le 1$ nên dãy số trên bị chặn.

c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{n+1+1} - \sqrt{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

$$= \frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 0$$

do $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số trên là dãy số giảm.

Rõ ràng $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{2}+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Tóm lại : $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ nên dãy số u_n bị chặn.

8. a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2(u_1 + u_4) = 14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 4u_1 + 6d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 20d = 60 & (1) \\ (u_1+3d)^2 + (u_1+11d)^2 = 1170 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có: $u_1 + 10d = 30 \Leftrightarrow u_1 = 30 - 10d$ (*)

Thay vào (2) ta có: $(30 - 7d)^2 + (30 + d)^2 = 1170$

$$\Leftrightarrow 900 - 420d + 49d^2 + 900 + 60d + d^2 = 1170$$

$$\Leftrightarrow 50d^2 - 360d + 630 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 5d^2 - 36d + 63 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = \dfrac{21}{5} \\ d = 3 \end{array}\right.$$

Từ (*) ta có: Với $d = 3 \Rightarrow u_1 = 0$.

$$\text{Với } d = \frac{21}{5} \Rightarrow u_1 = -12.$$

Vậy ta có hai cấp số cộng thỏa mãn bài toán:

- $u_1 = 0, d = 3.$
- $u_1 = -12, d = \dfrac{21}{5}.$

9. a) $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^5 = 192 \\ u_1q^6 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2 - 1) = 72 \\ u_1q^2(q^2 - 1) = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(1 + q^3 - q^2) = 10 \\ u_1q^2(1 + q^3 - q^2) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$

10. $\therefore$ A, B, C, D hay $\therefore$ A, Aq, Aq^2, Aq^3 (q là công bội của CSN)

$$C = 4A \Rightarrow Aq^2 = 4A \Leftrightarrow q^2 = 4 \Leftrightarrow q = 2 \text{ (do } q > 0).$$

Ta đã biết tổng các góc trong của tứ giác bằng 360^0

$$\Rightarrow A + B + C + D = 360^0 \Leftrightarrow A(1 + q + q^2 + q^3) = 360^0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{360^0}{1 + q + q^2 + q^3} = \frac{360^0}{15} = 24^0$$

Vậy các góc của tứ giác là $A = 24^0$, $B = 48^0$, $C = 96^0$, $D = 192^0$.

11. $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ x, y, z và $\div$ x, 2y, 3z.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, từ $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ x, y, z ta có:

$$y = xq,\ z = xq^2 \text{ và } x \neq 0.$$

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có: $4y = x + 3z$.

Vậy ta có: $x + 3xq^2 = 4xq \Leftrightarrow x(3q^2 - 4q + 1) = 0 \Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{3}; q = 1.$$

12. Nếu gọi diện tích đế tháp là u_1 và $u_2, u_3, ..., u_{12}$ lần lượt là diện tích của tầng 1, 2, ... tầng 11. Vậy ta có cấp số nhân : $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $u_1, u_2, u_3, ..., u_{12}$ với $u_1 = 12288m^2$ và $q = \dfrac{1}{2}$.

Vậy diện tích tầng trên cùng là $u_{12} = u_1 q^{12-1}$

$$u_{12} = 12288.\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 6(m^2)$$

13. $\div a^2, b^2, c^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow (b + a)(b - a) = (c + b)(c - b)$

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c-b}{(b+a)(c+a)} \Leftrightarrow \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{b+a} - \frac{1}{c+a}$$

$$\Leftrightarrow \div \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}.$$

14. a) Đáp án C đúng; b) Đáp án B đúng;

c) Đáp án C đúng; d) Đáp án B đúng.

15. Đáp án (B) đúng.

16. Đáp án (C) đúng.

17. Không có đáp án nào đúng. Đáp án đúng là $x = \pm 6$.

Vì: $\dfrac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ –4, x, –9. Theo tính chất của cấp số nhân thì: $x^2 = (-4)(-9) = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$.

18. Hệ thức (B): $u_{90} + u_{210} = 2u_{150} = 2u_1 = 198d$ (đúng).

19. (B) là cấp số nhân.

20. a) Theo tính chất của cấp số cộng: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{A-C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos B=2\sin^2\frac{B}{2}+2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos B=1-\cos B+\cos A+\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2\cos B=\cos A+\cos C \Rightarrow \div \cos A, \cos B, \cos C.$$

b) HS tự giải.

c) $\sin A\sin B=\dfrac{3\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \sin A\sin B=\dfrac{3\sin^2 C}{2(1+\cos C)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R}.\frac{a}{2R}=3\frac{c^2}{4R^2.2\left(1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} \Leftrightarrow a+b=2c \text{ (đpcm).}$$

d) Vì $B+C-A=B+C+A-2A=180^0-2A$

$\Rightarrow \sin(B+C+A)=\sin 2A$. Tương tự : $\sin(C+A-B)=\sin 2B$,

$\sin(B+A-C)=\sin 2C$.

Nên theo giả thiết ta có: $\div \sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$.

Theo tính chất của cấp số cộng ta có:

$$2\sin 2B=\sin 2A+\sin 2C \Leftrightarrow 2\sin B\cos B=\sin(A+C)\cos(A-C)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos B=\cos(A-C) \text{ (do } \sin B=\sin(A+C))$$

$$\Leftrightarrow \cos B=\cos(A-C)-\cos B \Leftrightarrow \cos B=\cos(A-C)+\cos(A+C)$$

$$\Leftrightarrow \cos B = 2\cos A\cos C \Leftrightarrow \frac{2}{\cos B} = \frac{1}{\cos A\cos C} \Leftrightarrow \frac{2\sin B}{\cos B} = \frac{\sin(A+C)}{\cos A\cos C}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan B = \frac{\sin A\cos C + \sin C\cos A}{\cos A\cos C} \Leftrightarrow 2\tan B = \tan A + \tan C \text{ (đpcm).}$$

21. Giả sử $d > 0$, ta có: $d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \ldots = u_n - u_{n-1} > 0$. Do đó:

$$\frac{1}{u_1u_2} = \frac{u_2 - u_1}{u_1u_2}\cdot\frac{1}{d} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)$$

$$\frac{1}{u_2u_3} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3}\right)$$

$$+\quad \frac{1}{u_3u_4} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_4}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{u_{n-1}u_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n}\right)$$

$$S = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{d}\frac{u_n - u_1}{u_1u_n}$$

$$S = \frac{1}{d}\cdot\frac{u_1 + (n-1)d - u_1}{u_1u_n} \Rightarrow S = \frac{n-1}{u_1u_n}$$

22. Có : $S_n = u_1 + u_1q + \ldots + u_1q^{n-1}$

$$S_{2n} - S_n = u_1q^n + u_1q^{n+1} + \ldots + u_1q^{2n-1} = q^nS_n$$

$$S_{3n} - S_{2n} = u_1q^{2n} + u_1q^{2n+1} + \ldots + u_1q^{3n-1} = q^{2n}.S_n$$

Vậy: $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_n}{q^nS_n} = \frac{1}{q^n} = q^{-n}$ (1)

$$\frac{S_n}{S_{3n} - S_{2n}} = \frac{q^nS_n}{q^{2n}S_n} = q^{n-2n} = q^{-n} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

23. Ta có : $u_{m+n} = A$ mà $u_{m+n} = u_1q^{m+n-1}$

$u_{m-n} = B$ mà $u_{m-n} = u_1 q^{m-n-1}$

$$\Rightarrow A = B.q^{2n} \Rightarrow q = \sqrt[2n]{\frac{A}{B}}.$$

Ta lại có: $\left.\begin{matrix} u_m = u_1 q^{m-1} \\ u_{m+n} = u_1 q^{m+n} \end{matrix}\right\} \frac{u_m}{A} = q^{-n} \Rightarrow u_m = A\sqrt[2n]{\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}} = \sqrt{AB}$.

Tương tự : $u_n = A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{m}{2n}}$.

24. ÷ cot A, cot B, cot C $\Leftrightarrow$ cot A + cot C = 2cot B

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+C)}{\sin A \sin C} = \frac{2\sin B}{\cos B} \Leftrightarrow \sin^2 B = 2\cos B \sin A \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} = 2.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.\frac{a}{2R}.\frac{c}{2R}$$

$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - b^2 \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2 \Leftrightarrow$ ÷ a^2, b^2, c^2 (đpcm).

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài tập

1. Có 1kg chất phóng xạ hạt. Biết rằng. cứ sau một khoảng thời gian T = 24 000 năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khoẻ của con người (T được gọi là chu kì bán rã).

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) hội tụ về 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, cho biết chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6}g.

2. Biết dãy số (u_n) thoả mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$.

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{6n-1}{3n+2}$;

b) $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$;

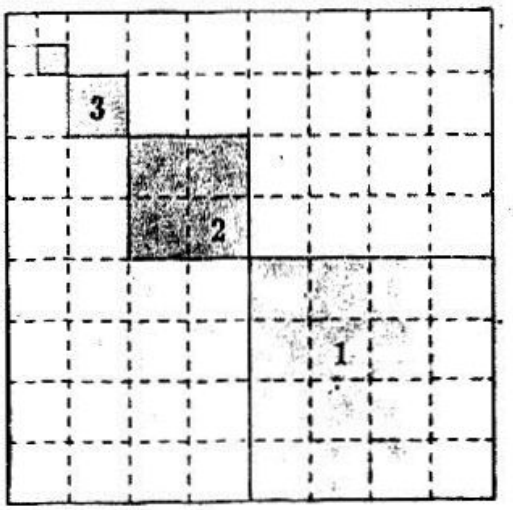
c) $\lim \frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n}$;

d) $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$.

4. Để trang hoàng cho căn phòng của mình chú chuột Mickey quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1. Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3,..., n, ... trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó (h 18).

Giả sử quy trình tô màu của Mickey có thể tiến ra vô hạn.

a) Gọi u_n là diện tích hình vuông màu xám thứ n. Tính u_1, u_2, u_3 và u_n.



Hình 18

b) Tính $\lim S_n$ với $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

5. Tính tổng : $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + ... + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + ...$

6. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn a = 1,020202 ... (chu kỳ là 02). Hãy viết a dưới dạng phân số.

7. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1)$;

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2)$;

c) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n)$;

d) $\lim(\sqrt{n^2 - n} + n)$.

8. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Biết $\lim u_n = 3$, $\lim v_n = +\infty$.

Tính các giới hạn:

a) $\lim\frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$;

b) $\lim\frac{v_n - 2}{v_n^2 - 1}$.

9*. Tìm các giới hạn sau : a) $\lim\frac{4n^3 - 7n + 1}{9n^2 + n + 3}$; b) $\lim\frac{n(2n-1)(3n-2)}{(2n+1)^3}$.

10. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\frac{n\sqrt{n^3 - n + 3} - n^2\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt{n^2 + 1} - 1}$;

b) $\lim\frac{3\sqrt[3]{n^3 + n + 3} - 2\sqrt{n^2 - 1}}{3n + 2}$;

c) $\lim n\left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2}\right)$;

d) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n\right)$.

11. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim n\left(\sqrt[3]{n - n^3} + n\right)$;

b) $\lim\frac{n + \sqrt[5]{n^5 + 1}}{n.4^n}$;

c) $\lim\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

12. Khoảng cách giữa một người đi xe máy và một người đi bộ là 1km. Vận tốc của người đi xe máy gấp 10 lần vận tốc người đi bộ. Hỏi người đi xe máy cần vượt quãng đường dài bao nhiêu để đuổi kịp người đi bộ.

Hướng dẫn giải

1. a) Theo đề bài ta có dãy số: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ là cấp số nhân $u_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ nên

$u_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$. Vậy u_n hội tụ về 0.

c) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^9} \Leftrightarrow 2^n > 10^{-9}$ (do $10^{-6}g = 10^{-9}kg$).

$$\Leftrightarrow (n-1)\lg 2 > 9 \Leftrightarrow n > \frac{9}{\lg 2} + 1 \approx 30.$$

Vậy sau chu kỳ thứ 30 tức 24 000 × 30 = 720 000 (năm) thì chất phóng xạ 1 kg không còn tác dụng.

2. Học sinh tự làm.

3. a) $\lim\frac{6n-1}{3n+2} = \lim\frac{\left(\frac{6n}{n} - \frac{1}{n}\right)}{\frac{3n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim\frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{6}{3} = 2$ (do $\lim\frac{1}{n} = 0; \lim\frac{2}{n} = 0$).

b) $\lim\frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1} = \frac{3}{2}$.

c) $\lim\frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n} = \lim\frac{\frac{3^n}{4^n} + 5\frac{4^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n} + \frac{2^n}{4^n}} = \lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n + \lim 5}{1 + \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{5}{1} = 5.$

(vì ta đã biết $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$).

d) *ĐS* : $\frac{3}{4}$.

4. Học sinh tự làm.

5. Dãy số $-1, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10^2}, ..., \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = -1$, $q = -\frac{1}{10}$.

Vậy $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} = -\frac{10}{11}$.

6. $a = 1 + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^4} + \frac{2}{10^6} + ...$

Do đó a = 1 + S, S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{2}{10^2}$ và $q = \frac{2}{10^2}$.

Vậy $S = \frac{\frac{2}{10^2}}{1-\frac{2}{10^2}} = \frac{2}{99}$. Suy ra $a = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}$.

7. a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1) = +\infty$; b) $\lim(-n^2 + 5n - 2) = -\infty$.

c) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n) = \lim \frac{n^2 - n - n}{\sqrt{n^2 - n} - n} = \lim \frac{-n}{n\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right)} = \lim \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} = -\frac{1}{2}$.

d) Làm tương tự như c). ĐS : $-\infty$.

8. Học sinh tự làm.

9. a) $\lim \frac{4n^3 - 7n + 1}{9n^2 + n + 3} = \lim \frac{4n^3}{9n^2} = \lim \frac{4}{9} n = +\infty$.

b) $\lim \frac{n(2n-1)(3n-2)}{(2n+1)^3} = \lim \frac{n^3 \frac{2n-1}{n} \frac{3n-2}{n}}{n^3 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^3} = \lim \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 - \frac{2}{n}\right)}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{2.3}{2^3} = \frac{3}{4}$.

10. a) $\lim \frac{n\sqrt{n^3 - n + 3} - n^2 \sqrt[3]{n}}{n^2 \sqrt{n^2 + 1} - 1} = \lim \frac{n^3 \left(\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4}} - \sqrt[3]{\frac{1}{n^2}}\right)}{n^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0$.

b) $\lim \dfrac{3\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}-2\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}{3+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{3-2}{3}=\dfrac{1}{3}.$

c) $\lim \dfrac{n[n^2+1-(n^2-2)]}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}}=\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}}=\lim \dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n^2}}}=\dfrac{3}{2}.$

d) $\lim \dfrac{n^3-2n^2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim \dfrac{-2n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-2}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n}}+1\right)}=-\dfrac{2}{3}.$

(Chú ý bài này dùng hằng đẳng thức $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

11. a) Dùng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

$$\lim \frac{n[(n-n^3)+n^3}{\sqrt[3]{(n-n^3)^2}-n\sqrt[3]{n-n^3}+n^2}=\lim \frac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{n^2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^2}-1}+1\right)}=\frac{1}{3}.$$

b) $\lim \dfrac{n\left(1+\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^5}}\right)}{n.4^n}=\lim \dfrac{1}{4^n}\left(1+\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^5}}\right)=0.$

(Vì $\lim \dfrac{1}{4^n}=0$; $\lim\left(1+\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^5}}\right)=2$).

c) $\lim \dfrac{3^n\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^{n+1}\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\lim \dfrac{1}{3}.\lim \dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{0+1}{0+1}=\dfrac{1}{3}.$

12. Khi người đi xe máy đi hết quãng đường AB = 1km thì người đi bộ đi được quãng đường $BC=\dfrac{1}{10}AB=\dfrac{1}{10}$km. Khi người xe máy đi hết quãng đường $CC_1=\dfrac{1}{10}BC=\dfrac{1}{100}$km và cứ thế tiếp tục đến khi người xe máy đuổi kịp người đi bộ.

Hình 19

Như vậy, tất cả các quãng đường mà người đi xe máy đã đi là một dãy số: $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, ..., \frac{1}{10^{n-1}}$. Đây là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 1$, $q = \frac{1}{10}$.

Vậy quãng đường mà người đi xe máy đã đi qua để đuổi kịp người đi bộ là:

$$S = \lim S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \text{ (km)} \quad (\lim S_n = \frac{u_1}{1-q}).$$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Bài tập

1. Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x+1}{3x-2}$; b) $\lim \frac{2-5x}{x^2+3}$.

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

và các dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$; và (v_n) với $v_n = -\frac{1}{n}$.

Tính $\lim u_n$, $\lim v_n$, $\lim f(u_n)$, $\lim f(v_n)$.

Từ đó có kết luận gì về giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to 0$?

3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-1}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x-5}{(x-2)^2}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{17}{x^2+1}$.

4. Xác định dạng vô định và tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{4-x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^5+x^4-1}{3+x^5}$;

c) $\lim \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+5x})$;

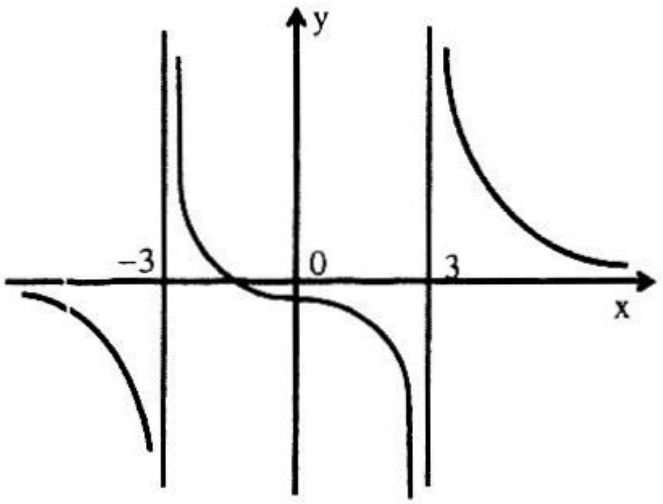
e) $\lim \sqrt{2x^2-x}$; f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{5}{x(x-1)^2} \right)$.

5. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$, có đồ thị như hình 20a.

a) Quan sát đồ thị và nêu nhận xét về hàm số đã cho khi $x \to -\infty$, $x \to 3^-$ và $x \to -3^+$.

b) Kiểm tra các nhận xét trên bằng cách tính các giới hạn sau:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-\infty; -3)$;
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-3; 3)$;
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-3; 3)$.



Hình 20 a

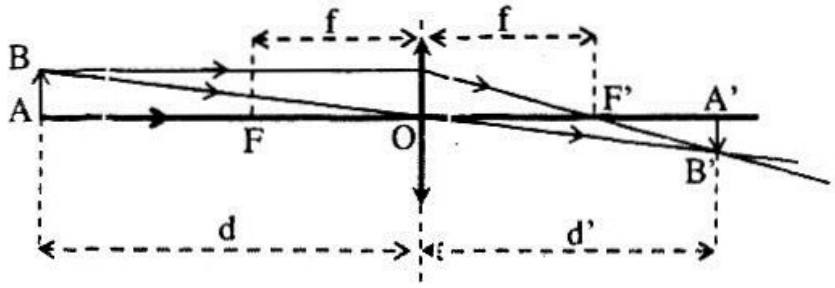
6. Tính: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^5 + 3x^2 - 5)$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5})$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{5 - 2x}$.

7. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh A'B' của nó tới quang tâm O của thấu kính (hình 20b). Công thức thấu kính là : $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'} = \dfrac{1}{f}$.



Hình 20b

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

d) Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

8*. Tìm giới hạn : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x}$.

9. Tìm giới hạn : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{8-x}}{x}$. (Trích đề thi ĐHQG Hà Nội – 1997, A).

10. Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1}$. (Trích đề thi ĐH Đà Nẵng – 1999).

11. Tính giới hạn: a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}2x\,\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}-x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2}-\cos x}{x^2}$; (Trích đề thi ĐH Sư phạm Hà Nội 2– 2000, A).

Hướng dẫn giải

1. a) Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-2}$ xác định trên $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Cho x những giá trị lập thành dãy số (x_n) như trong bảng sau:

x	3,9	3,99	3,999	...	$x_0=3,\underbrace{99...9}_{n\text{ chữ số }9}$	...	$\to 4$
f(x)	0,5052	0,5005	0,5001	...	$f(x_n)$	...	$\to 0,5$

Vậy $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{3x-2}=0,5$.

b) Hàm số $f(x)=\dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Cho x những giá trị lập thành dãy số (x_n) như trong bảng sau:

x	1	2	4	8	$x_n=2^{n-1}$	...	$\to +\infty$
f(x)	–0,75	–2,5714	–4,1053	–4,7463	$f(x_n)$	...	$\to -5$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-5x^2}{x^2+3}=-5$.

2. $\lim u_n=\lim\dfrac{1}{n}=0$, $\lim v_n=\lim-\dfrac{1}{n}=0$.

$\lim f(u_n)=\lim(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1)=1$, $\lim f(v_n)=\lim\dfrac{-2}{n}=0$.

$\lim\limits_{u_n \to 0} f(u_n) \neq \lim\limits_{u_n \to 0} f(v_n)$. Vậy hàm số f(x) không có giới hạn.

3. a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -3} (x - 1) = -4.$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 5}{(x-2)^2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} 3x - 5}{\lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2} = +\infty.$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{17}{x^2 + 1} = 0.$

4. a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{4 - x^2}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$;

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \to 2} -\frac{x+3}{2+x} = -\frac{5}{4}.$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 + x^4 - 1}{3 + x^5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5\left(2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(\dfrac{3}{x^5} + 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^5}}{\dfrac{3}{x^5} + 1} = 2.$$

c) $$\frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} = \frac{x + 3 - 9}{(x-6)(\sqrt{x+3} + 3)} = \frac{x - 6}{(x-6)(\sqrt{x+3} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + 3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{1}{\sqrt{x+3} + 3} = \dfrac{1}{6}.$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$ có dạng $\infty - \infty$.

$$x - \sqrt{x^2 + 5x} = \frac{x^2 - (x^2 + 5x)}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \frac{-5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}}.$$

Vậy $$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{5}{x}}} = \frac{-5}{2}.$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{2x^2-x}}{2-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}\right)}{x\left(\dfrac{2}{x}-3\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}}{\dfrac{2}{x}-3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

f) $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}-\dfrac{5}{x(x-1)^2}\right]$ có dạng $\infty-\infty$.

Ta có: $\dfrac{3}{(x-1)^2}-\dfrac{5}{x(x-1)^2}=\dfrac{3x-5}{x(x-1)^2}=\dfrac{x\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}{x(x-1)^2}=\dfrac{3-\dfrac{5}{x}}{(x-1)^2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{3}{(x-1)^2}-\dfrac{5}{x(x-1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-\dfrac{5}{x}}{(x-1)^2}=-\infty$.

5. a) Khi $x\to-\infty$, $f(x)\to0$ khi $x\to-3^-$, $f(x)\to-\infty$

Khi $x\to-3^+$, $f(x)\to+\infty$.

b) Học sinh tự làm.

6. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-x^2+x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)=1>0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+3x^2-5)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{5}{x^5}\right)=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{5}{x^5}\right)=-2$.

ĐS: c) $+\infty$; d) -1.

7. a) $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{d}=\dfrac{d-f}{d.f}\Rightarrow d'=\varphi(d)=\dfrac{d.f}{d-f}$.

b) $\lim\limits_{d\to+\infty}\varphi(d)=\lim\limits_{d\to+\infty}\dfrac{d.f}{d-f}=f$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}+\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x}$ có dạng $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Ta có: $\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}+\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x}=\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}+1}{1-\cos x}+\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-1}{1-\cos x}$

$$=\frac{\sqrt[3]{3x^2-1}+1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}+\frac{\sqrt{2x^2+1}-1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}+\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}+1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}+1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-1+1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}\left(\sqrt[3]{(3x^2-1)^2}-\sqrt[3]{3x^2-1}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}6\left(\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2.\frac{1}{\sqrt[3]{(3x^2-1)^2}-\sqrt[3]{3x^2-1}+1}=\frac{6}{3}=2.$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+1-1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}(\sqrt{2x^2+1}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}4\left(\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2.\frac{2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=4\frac{1}{2}=2.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-1}+\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x}=2+2=4.$

9. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2(\sqrt{1+x}+1)}{x}+\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1+x-1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{8-(8-x)}{x\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}} = 1+\frac{1}{12} = \frac{13}{12}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-(3x+1)}{(x^2-1)(2x+\sqrt{3x+1})}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)(x+\frac{1}{4})}{(x-1)(x+1)(2x+\sqrt{3x+1})} = \lim_{x\to 1}\frac{4\left(x+\frac{1}{4}\right)}{(x+1)(2x+\sqrt{3x+1})} = \frac{5}{8}.$$

11. a) Đặt $t = \dfrac{\pi}{4} - x$ thì $x = \dfrac{\pi}{4} - t$. Tính f(x) theo t :

$$f(x) = \tan 2x.\tan(\frac{\pi}{4}-x) = \tan(\frac{\pi}{2}-2t).\tan t = \cot 2t\,\tan t$$

$$= \frac{\cos 2t}{\sin 2t}.\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos 2t.\sin t}{2\sin t.\cos^2 t} = \frac{\cos 2t}{2\cos^2 t};$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t}{2\cos^2 t} = \frac{1}{2}.$$

b) $f(x) = \dfrac{3^{x^2}-\cos x}{x^2} = \dfrac{3^{x^2}-1}{x^2} + \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{e^{x^2\ln 3}-1}{x^2\ln 3}.\ln 3 + \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2};$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2\ln 3}-1}{x^2\ln 3}.\ln 3 + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1.\ln 3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln 3.$$

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài tập

1. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của các hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tại $x_0 = 3$.

2. a) Xét tính liên tục của hàm số $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

tại $x_0 = 2$.

b) Trong biểu thức xác định g(x) ở trên cần thay số 5 bởi số nào để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{nếu } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$

a) Vẽ đồ thị hàm số y = f(x). Từ đó nhận xét về tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

b) Khẳng định nhận xét trên bằng một chứng minh.

4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x - 6}$ và $g(x) = \tan x + \sin x$.

Với mỗi hàm số, hãy xác định các khoảng trên đó hàm số liên tục.

5. Ý kiến sau đúng hay sai?

"*Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0, thì $y = f(x) + g(x)$ là một hàm số không liên tục tại x_0*".

6. Chứng minh rằng phương trình :

a) $2x^3 - 6x + 1$ có ít nhất hai nghiệm;

b) $\cos x = x$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

1. a) $f(3) = 27 + 6 - 1 = 32$.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3}(x^3 + 2x - 1) = 32 = f(3)$. Vậy f(x) liên tục tại $x_0 = 3$.

2. a) Ta có $g(2) = 5$, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$

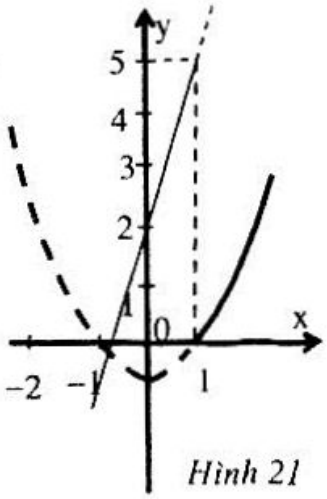
$= \lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12.$

Như vậy $\lim\limits_{x\to 2} g(x) \neq g(2)$ nên hàm số g(x) không liên tục tại $x_0 = 2$.

b) Muốn g(x) liên tục tại x = 2 thì g(2) = 12. Nên phải thay 5 bởi số 12.

3. a) Đồ thị hàm số là phần nét liền của hình 21.

b) Hàm số gián đoạn tại điểm duy nhất x = 1 trên tập xác định của là tập $\mathbb{R}$.



Hình 21

4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$, TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

• Nếu $x \neq 2$ và $x \neq -3$ thì hàm số $g_1(x) = x + 1$, $g_2(x) = x^2 + x - 6$ đều là đa thức nên chúng liên tục trên $\mathbb{R}$, nên chúng cũng liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3, 2)$, $(2; +\infty)$. Hơn nữa $g_2(x) \neq 0\ \forall x$ thuộc các khoảng trên.

Vậy theo định lí 2 ta có hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$ liên tục trên khoảng xác định của chúng.

• Nếu x = 2 hoặc x = −3, hàm số gián đoạn tại các điểm này.

Hàm số g(x) liên tục trên các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Ý kiến đó là đúng.

6. a) Hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$, hiển nhiên nó liên tục trên đoạn [0; 1] và $f(0)f(1) = 1.(-3) < 0$, nên ít nhất có một số $x_0 \in (0; 1)$ thoả mãn $f(x_0) = 0$. Nghĩa là phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0; 1)$. Cũng chứng minh tương tự phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_1 \in (-2; 0)$. Vậy phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

b) Ta có phương trình cosx − x = 0. Hàm số f(x) = cosx − x là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ và $f(0).f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} < 0$, nên có ít nhất

một $x_0 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $f(x_0) = 0$. Nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ hay $\cos x - x = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Hãy lập bảng liệt kê các giới hạn đặc biệt của dãy số và các giới hạn đặc biệt của hàm số.

2. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Biết $|u_n - 2| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số (u_n) ?

3. Tên của một bạn học sinh được mã hóa bởi số 1530. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, H, N, O với:

$$N = \lim\frac{3n-1}{n+2}; \qquad H = \lim\frac{\sqrt{n}-2}{3n+7};$$

$$A = \lim\frac{3^n - 5.4^n}{1-4^n}; \qquad O = \lim\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n+1}\right).$$

Hãy cho biết tên của ban học sinh này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các ký hiệu biểu thức tương ứng.

4. a) Có nhận xét gì về công bội của các cấp số nhân lùi vô hạn?

b) Cho ví dụ về cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là số âm và một cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là số dương và tính tổng của mỗi cấp số nhân đó.

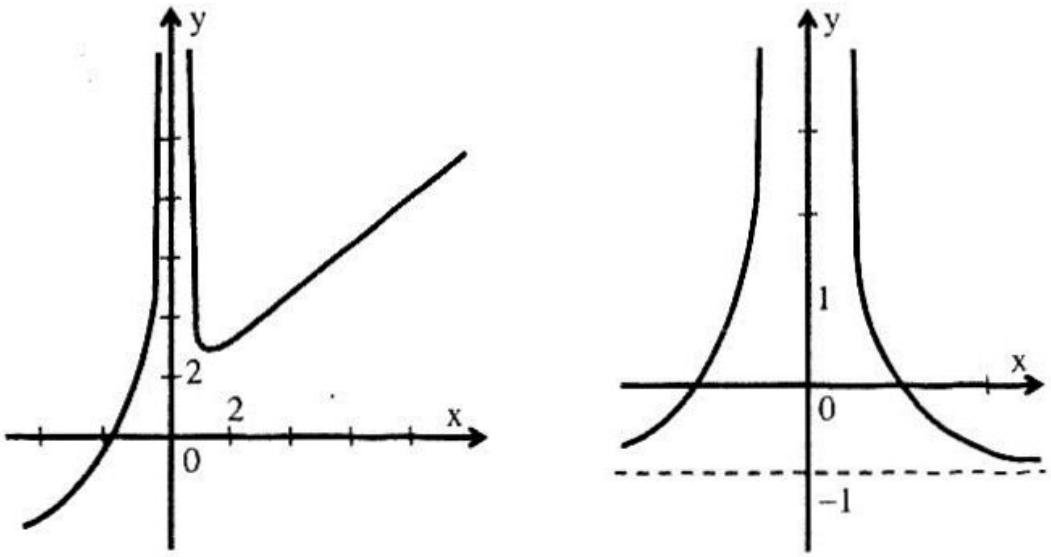
5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$; c) $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{2x-5}{x-4}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+x^2-2x+1)$; e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x+3}{3x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}$.

6. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$ và $g(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2}$

Các đường cong dưới đây là đồ thị của hai hàm số này, xét trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (hình 22).



Hình 22

a) Tính $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Từ kết quả câu a) hãy xác định đường cong nào là đồ thị của mỗi hàm số đã cho.

7. Xét tính liên tục trên $\mathbb{R}$ của các hàm số $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x > 2 \\ 5 - x & \text{nếu } x \le 2. \end{cases}$

8. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

Bài tập trắc nghiệm

9. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Một dãy số hội tụ thì luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm.

(B) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì $\lim\limits_{x\to +\infty} u_n = +\infty$.

(C) Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim (u_n - v_n) = 0$.

(D) Nếu $u_n = a^n$ và $-1 < a < 0$ thì $\lim u_n = 0$.

10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1+2+3+...+n}{n^2+1}$.

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng :

(A) $\lim u_n = 0$; (B) $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$; (C) $\lim u_n = 1$;

(D) Dãy (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

11. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) $\lim u_n = 1+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}+... = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$;

(B) $\lim u_n = -\infty$;

(C) $\lim u_n = +\infty$;

(D) Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

12. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-3x-1}{x-1}$ bằng :

(A) -1; (B) $-\infty$; (C) -3; (D) $+\infty$.

Tìm phương án đúng.

13. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ bằng

(A) $+\infty$; (B) 1; (C) $-\infty$; (D) -1.

Tìm phương án đúng.

14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x \neq 3 \\ m & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$

Để hàm số f(x) liên tục tại x = 3 thì phải chọn m bằng bao nhiêu?

(A) 4; (B) –1; (C) 1; (D) –4.

15. Cho phương trình $-4x^3 + 4x - 1 = 0$.

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

(A) Hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

(B) Phương trình trên không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$;

(C) Phương trình trên có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$;

(D) Phương trình trên có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

16*. Chứng minh rằng phương trình: $2x^3 - 6x = 1 = 0$

có 3 nghiệm trên khoảng $(-2; 2)$.

17. Chứng minh mệnh đề sau đây:

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $f(x) \neq 0$ tại mọi điểm thuộc khoảng đó. Thế thì: hoặc $f(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$, hoặc $f(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

18. Chứng minh rằng với mọi số a, b, c, phương trình bậc 3 : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

luôn luôn có nghiệm.

Hướng dẫn giải

1. Học sinh tự làm.

2. Học sinh tự làm.

3. $N = \lim \frac{3n-1}{n+2} = 3$; (chữ N đứng thứ ba của tên đó).

$$H = \lim \frac{\sqrt{n}-2}{3n+7} = \lim \frac{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{2}{n}\right)}{n\left(3+\frac{7}{n}\right)} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{2}{n}}{3+\frac{7}{n}} = \frac{0}{3} = 0$$

(chữ H đứng cuối của tên đó).

$$A = \lim \frac{3^n - 5.4^n}{1 - 4^n} = \lim \frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - 5\right]}{4^n\left(\frac{1}{4^n} - 1\right)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

(chữ A đứng thứ hai của tên đó).

$$O = \lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n + 1}\right) = \lim \frac{n^2 + n - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n + 1}}$$

$$= \lim \frac{2n - 1}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = \lim \frac{n(2 - \frac{1}{n})}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

(chữ O đứng đầu tiên của tên đó).

Vậy tên của học sinh này là OANH.

4. Cấp số nhân lùi vô hạn có $|q| < 1$.

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ..., \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, ... \qquad q = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., 2^{2-n}, ... \qquad q = \frac{1}{2}.$$

- $S = \frac{u_1}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

- Đối với cấp số nhân lùi vô hạn thứ 2: $S = \frac{u_1}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$.

5. a) ĐS : $\frac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{(x + 2)(x + 3)}{x(x + 3)} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x + 2}{x} = \frac{1}{3}$;

c) ĐS : $-\infty$; d) ĐS : $-\infty$; e) ĐS: $\frac{1}{3}$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}}{3x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}{3-\frac{1}{x}}=\dfrac{-2}{3}$.

6. a) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2};g(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to0}g(x)=+\infty;$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=-1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty.$$

b) Như vậy đường cong C_2 là đồ thị của hàm số $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}$ và đường cong C_1 là đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}$.

7. Với $x\neq2$ thì hàm số g(x) liên tục. Vậy muốn xét tính liên tục của g(x) trên $\mathbb{R}$ chỉ cần xét tính liên tục của g(x) tại x = 2.

$$\lim_{x\to2^+}g(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}(x+1)=3;$$

$$\lim_{x\to2^-}g(x)=\lim_{x\to2^-}(5-x)=3=\lim_{x\to2^+}g(x).$$

Vậy g(x) liên tục tại x = 2. Do đó g(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

8. Học sinh tự làm.

9. Theo định nghĩa $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-a)=0$.

Như vậy (u_n) có giới hạn là a nếu với mọi số dương ε cho trước (nhỏ bao nhiêu tùy ý), tồn tại một số tự nhiên N_0 sao cho $\forall n\in\mathbb{N}, n>N_0$ thì $|u_n-a|<\varepsilon$.

Do đó câu (C) đúng.

10. $u_n = \dfrac{1+2+3+...+n}{n^2-1} = \dfrac{(1+n)n}{2(n^2-1)}$; $\lim u_n = \lim \dfrac{n^2\left(\dfrac{1}{n}+1\right)}{2n^2\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{2}$.

Khẳng định (B) đúng.

11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1\right)} =$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

Đáp án (C) đúng.

12. Đáp án (D) đúng.

13. Đáp án (A) đúng.

14. Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Muốn hàm số f(x) liên tục tại x = 3 thì $\lim\limits_{x\to3} f(x) = f(3)$.

Mà f(3) = m nên $\lim\limits_{x\to3} f(x) = m$.

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x+1-4}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3} = \lim_{x\to3}-\left(\sqrt{x+1}+2\right) = -4.$$

Vậy m = −4. Đáp án (D) đúng.

15. Đáp án (B) đúng.

16. a) Hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ liên tục trên đoạn [−2; 0], có f(−2)f(0) = − 9.1 < 0 nên có ít nhất một nghiệm $x_1 \in (-2; 0)$ thoả mãn $f(x_1) = 0$, nghĩa là phương trình f(x) = 0 có nghiệm $x_1 \in (-2; 0)$.

Hàm f(x) liên tục trên đoạn [0; 1], có f(0)f(1) = 1.(−3) < 0 nên có ít nhất một nghiệm $x_2 \in (0; 1)$ thoả mãn $f(x_2) = 0$, nghĩa là phương trình f(x) = 0 có nghiệm $x_2 \in (0; 1)$.

Hàm f(x) liên tục trên đoạn [1; 2], có $f(2)f(1) = 5.(-3) < 0$ nên có ít nhất một nghiệm $x_3 \in (1; 2)$ thoả mãn $f(x_3) = 0$, nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_3 \in (1; 2)$.

Tóm lại, phương trình có ba nghiệm phân biệt trong khoảng $(-2; 2)$.

17. Giả sử tồn tại $x_1, x_2 \in (a, b)$ để $f(x_1) f(x_2) < 0$ thì tồn tại $x_0 \in (x_1; x_2) \subset (a, b)$ để $f(x_0) = 0$ trái với giả thiết $y = f(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$. Do đó $f(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$ hoặc $f(x) < 0\ \forall x \in (a, b)$.

18. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$ (hay liên tục $(-\infty;\ +\infty)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, nên ắt phải tồn tại x_2 đủ lớn để $f(x_2) > 0$, ta lại có $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại x_1 sao cho $|x_1|$ đủ lớn để $f(x_1) < 0$.

Như vậy có hai giá trị $x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty)$, $f(x_2)f(x_1) < 0$, nên ắt phải tồn tại x_0, $x_1 < x_0 < x_2$ để $f(x_0) = 0$, nên x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

Bài tập

1. Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^3$, biết rằng:

a) $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$; b) $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$.

2. Tính Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau đây theo x và Δx:

a) $y = 2x - 5$; b) $y = x^2 - 1$; c) $y = 2x^3$; d) $y = \frac{1}{x}$.

3. Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng định nghĩa tại các điểm đã chỉ ra:

a) $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$; b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$;

c) $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 0$.

4. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nhưng có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

5. Cho đường cong $y = x^3$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong đó:

a) Tại điểm $(-1; -1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2;

c) Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

6. Viết phương trình tiếp tuyến của đường hyperbol $y = \frac{1}{x}$

a) Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng -1;

c) Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

7. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8\ m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

a) Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t (t = 5s) đến

t + Δt, trong các trường hợp Δt = 0,1s; Δt = 0,05s; Δt = 0,001s.

b) Tìm vận tốc tức thời tại thời điểm t = 5s.

8*. Cho hàm số f(x) : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0\end{cases}$. Tính f'(0).

(Trích đề thi ĐHGTVT – 1994).

9. Cho hàm số f(x) = $|x-97|$. Tính hàm số có đạo hàm tại x = 97 không? Tại sao?

10. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số y = sin5x tại $x=\dfrac{\pi}{3}$.

11. Tìm điều kiện của a, b sao cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & \text{với } x\geq 0\\ a\sin x+b\cos x & \text{với } x<0\end{cases}$.

có đạo hàm tại x = 0.

Hướng dẫn giải

1. Ta biết Δy = f(x_0 + Δx) – f(x_0) (Δx là số gia của đối số).

a) Δy = f(1+1) – f(1) = $2^3 - 1^3 = 7$.

b) Δy = f(1 – 0,1) – f(1) = 0,729 – 1 = – 0,271.

2. a) Δy = 2(x + Δx) – 5 – (2x – 5) = 2Δx ; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2$.

b) Δy = $(x+\Delta x)^2 - 1 - (x^2-1) = 2\Delta x.x + \Delta x^2$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

c), d): Học sinh tự làm.

3. a) Δy = $(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x) - 2 = 3\Delta x + \Delta x^2$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=3+\Delta x.$$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3+\Delta x)=3.$$

b) $\Delta y=\dfrac{1}{2+\Delta x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{2\Delta x(2+\Delta x)} = \frac{-1}{2(2+\Delta x)}.$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4}.$$

c) $\Delta y = \dfrac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} + 1 = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x - 1}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x - 1}; f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x - 1} = -2;$$

4. Ta đã biết hàm số $y = f(x)$ *gián đoạn* tại x_0 thì nó *không có đạo hàm* tại điểm đó.

Hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1;$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x^2 = 0.$$

Vậy hàm số f(x) gián đoạn tại x = 0, nếu nó không có đạo hàm tại x = 0.

Tại x = 2, ta có $\Delta y = [(2 + \Delta x) - 1]^2 - (2 - 1)^2 = \Delta x^2 + 2\Delta x + 1 - 1 = \Delta x^2 + 2\Delta x$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

$f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2$. Vậy hàm số f(x) có đạo hàm tại x = 2.

5. Ta đã biết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại $M_0(x_0; f(x_0))$ là: $y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$ trong đó $y_0 = f(x_0)$.

a) Ta có $x_0 = -1$, $y_0 = -1$, $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \Rightarrow f'(-1) = 3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$ là :

$$y - (-1) = 3(x - (-1)) \Rightarrow y = 3x + 2.$$

b) $x_0 = 2$, $f(x_0) = f(2) = 8$, $f'(2) = 12$. Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y - 8 = 12(x - 12) \Rightarrow y = 12x - 16.$$

c) $f'(x_0) = 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1 \Rightarrow f(x_0) = \begin{bmatrix} f(1) = 1 \\ f(-1) = -1 \end{bmatrix}$

Vậy có hai tiếp tuyến, phương trình của tiếp tuyến là:

$$y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 2 ;$$

$$y + 1 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 2.$$

6. a) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \left(y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$

$x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = 2; y'_{(x_0)} = y'_{\left(\frac{1}{2}\right)} = -4$. Vậy phương trình của tiếp tuyến là:

$$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = -4x + 4.$$

b) $x_0 = -1$, $f(x_0) = f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$, $f'(-1) = -1$.

Vậy phương trình của tiếp tuyến là: $y + 1 = -1(x + 1)$

$$y = -x - 2.$$

7. a) Vận tốc trung bình của chuyển động từ 5s đến $5 + \Delta t$ là tỉ số $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ với :

$$S(5 + \Delta t) - S(5).$$

• Với $\Delta t = 0,1s \Rightarrow \Delta s = \frac{1}{2}.9,8.(5 + 0,1)^2 - \frac{1}{2}.9,8.5^2 = 4,949$.

$$v_{tb} = \frac{4,949}{0,1} = 49,49(m/s).$$

• Với $\Delta t = 0,05s \Rightarrow \Delta s = 2,46225$.

$$v_{tb} = \frac{2,46225}{0,05} = 49,245 \text{ (m/s)}.$$

• Với $\Delta t = 0,01s \Rightarrow \Delta s = 0,49049$ (m/s).

$v_{tb} = \dfrac{0,49049}{0,01} = 49,049$ (m/s).

b) $S' = \left(\dfrac{1}{2}gt^2\right)' = gt = 9,8t$.

$V = S'(5) = 9,8 \times 5 = 49$ (m/s).

8. $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\Delta x}\right)^2 = 1$.

9. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(97+\Delta x) - f(97)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1 \Rightarrow f'(97^-) = -1$.

Mặt khác $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(97+\Delta x) - f(97)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1 \Rightarrow f'(97^+) = 1$.

Vậy $f'(97^-) \neq f'(97^+)$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 97$.

10. $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3} + \Delta x\right) - f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\left(5\dfrac{\pi}{3} + 5\Delta x\right) - \sin 5\dfrac{\pi}{3}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin 5\dfrac{\Delta x}{2}}{5\dfrac{\Delta x}{2}}.5.\cos\left(5\frac{\pi}{3} + 5\frac{\Delta x}{2}\right) = 5\cos 5\frac{\pi}{3} = \frac{5}{2}.$$

11. $f'(0^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{p\cos\Delta x + q\sin\Delta x - p}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \left[\frac{q.\sin\Delta x}{\Delta x} - p\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0^-} \left[\frac{q.\sin\Delta x}{\Delta x} - p\frac{\sin\Delta\dfrac{x}{2}}{\Delta\dfrac{x}{2}}\sin\Delta\frac{x}{2}\right] = q;$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{p.\Delta x + q + 1 - p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \left[p + \frac{q-p+1}{\Delta x}\right].$$

+ *Khả năng 1:* $q - p + 1 = 0 \Rightarrow f'(0^+) = p$.

Nhưng $f'(0^-) - f'(0^+) = q - p = -1$.

$\Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow f'(0)$ không tồn tại.

+ *Khả năng 2:* $q - p + 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0^-} \left[p + \frac{q - p + 1}{\Delta x} \right] = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } q - p + 1 > 0 \\ -\infty \text{ nếu } q - p + 1 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(0^+)$ không tồn tại $\Rightarrow f'(0)$ không tồn tại.

Tóm lại: $\forall p, q$ thì hàm số không thể có đạo hàm tại $x = 0$.

§ 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Bài tập

1. Bằng định nghĩa tìm đạo hàm của hàm số:

a) $y = 7 + x - x^2$ tại $x_0 = 1$; b) $y = x^3 - 2x + 1$ tại $x_0 = 2$.

2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$; b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$;

c) $y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1$; d) $y = 3x^5(8 - 3x^2)$.

3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^7 - 5x^2)^3$; b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$;

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; d) $y = \frac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$;

e) $y = \left(m + \frac{n}{x^2} \right)^3$, (m, n là các hằng số).

4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$; b) $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$;

c) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số); d) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

5. Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm x để : a) $y' > 0$; b) $y' < 3$.

6*. Cho $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-2007)$. Tính $f'(0)$.

7. Tính đạo hàm của hàm số: $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

8. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 - x - (x^3 - x)^2$.

Hướng dẫn giải

1. a) $\Delta y = 7 + (1 + \Delta x) - (1 + \Delta x)^2 - (7 + 1 - 1) = -\Delta x^2 - \Delta x + 7 - 7 = -\Delta x^2 - \Delta x$;

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\Delta x - 1$, $y'_{(1)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(-\Delta x - 1) = -1$.

b) Làm tương tự $y'(2) = 10$.

2. a) $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2$; b) $y' = -2x^3 + 2x - \dfrac{1}{3}$;

c) $y' = 2x^3 - 2x^2 + \dfrac{8}{5}x$; d) $y' = 15x^4(8 - 3x^2) + 3x^5(-6)x = -63x^6 + 120x^4$.

3. a) $y' = 3(x^7 - 5x^2)^2 (x^7 - 5x^2)' = 3(x^7 - 5x^2)^2 (7x^6 - 10x)$

$= 3x^5(x^5 - 5)^2(7x^5 - 10)$.

b) $y' = (x^2 + 1)'(5 - 3x^2) + (x^2 + 1)(5 - 3x^2)'$

$= 2x(5 - 3x^2) + (x^2 + 1)(-6x) = 4x(1 - 3x^2)$.

c) $y' = \dfrac{(x^2 - 1).2 - 2x.2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$.

d) $y' = \dfrac{(x^2 - x + 1).(-5) - (2x - 1)(3 - 5x)}{(x^2 - x + 1)^2} = \dfrac{5x^2 - 6x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}$.

e) $y' = 3\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^2 \left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)' = 3\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^2 . \dfrac{-2n}{x^3} = -\dfrac{6n}{x^3}\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^2$.

4. a) $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1 \Rightarrow y' = 2x - \sqrt{x} - x\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x - \dfrac{3x}{2\sqrt{x}} = 2x - \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

b) $y' = \dfrac{(2 - 5x - x^2)'}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}} = \dfrac{-5 - 2x}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}}$.

c) $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}.3x^2 - x^3\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = \dfrac{x^2(3a^2 - 2x^2)}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

5. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

a) $y' > 0 \Rightarrow 3x(x - 2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

b) $y' < 0 \Rightarrow 3x(x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

6. $f'(x) = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - 2007) + x(x - 2)(x - 3) \ldots (x - 2007)$

$+ x(x(x - 4) \ldots (x - 2007) + \ldots + x(x - 2)(x - 4) \ldots (x - 2006)$.

Vậy $f'(0) = (-1)(-2)(-3) \ldots (-2007) = -1.2.3 \ldots 2007 = -\dfrac{1 + 2007}{2} \cdot 2007$

$= -2015028$.

7. $y' = \dfrac{(x-1)^2.3.(x+1)^2 - 2(x-1).(x+1)^3}{(x-1)^4} = \dfrac{3(x-1)(x+1)^2 - 2(x+1)^3}{(x-1)^3}$

$= \dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$.

8. $y' = 3x^2 - 1 - 2(x^3 - x)(3x^2 - 1) = (3x^2 - 1)(1 - 2x^3 + 2x)$.

§3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài tập

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x - 1}{5x - 2}$;

b) $y = \dfrac{2x + 3}{7 - 3x}$;

c) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{3 - 4x}$;

d) $y = \dfrac{x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$.

2. Giải các bất phương trình sau:

a) $y' < 0$, với $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$; b) $y' \geq 0$ với $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$;

c) $y' > 0$ với $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$.

3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$; b) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; c) $y = x \cot x$;

d) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$; e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$; f) $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$.

4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$; b) $y = \left(6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)(7x - 3)$;

c) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$; d) $y = \tan^2 x - \cot x^2$; e) $y = \cos\dfrac{x}{1 + x}$.

5. Tính $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(1)}$, biết rằng $f(x) = x^2$ và $\varphi(x) = 4x + \sin\dfrac{\pi x}{2}$.

6. Chứng minh rằng các hàm số sau đây có đạo hàm không phụ thuộc x.

a) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x$;

b) $y = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$.

7. Giải các phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng:

a) $f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$; b) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi + x}{2}\right)$.

8. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$, biết rằng:

a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$;

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

1. a) $y' = \dfrac{(5x-2)(x-1)' - (5x-2)'(x-1)}{(5x-2)^2} = \dfrac{5x-2-5x+5}{(5x-2)^2} = \dfrac{3}{(5x-2)^2}$.

b) *ĐS*: $y' = \dfrac{23}{(7-3x)^2}$.

c) $y' = \dfrac{(3-4x)(2x+2)+4(x^2+2x+3)}{(3-4x)^2} = \dfrac{-2(2x^2-3x-9)}{(3-4x)^2}$.

d) $y' = \dfrac{(x^2-3x)(2x+7)-(2x-3)(x^2+7x+5)}{x^2(x-3)^2} = \dfrac{-10x^2-10x+15}{x^2(x-3)^2}$.

2. a) $y' = \dfrac{(x-1)(2x+1)-1(x^2+x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$y' < 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} < 0$.

Giải bất phương trình này bằng cách lập bảng xét dấu của y', ta được nghiệm của bất phương trình là: $(-1\ ;\ 1) \cup (1\ ;\ 3)$

b) $y' = \dfrac{(x+1).2x-1(x^2+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1).(x+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x+3}{x-1}$ với $x \neq 1$.

Lập bảng xét dấu của y':

	$-\infty$		-3		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$\|$	$+$
y'	$+$	0	$-$		$\|\|$	$+$

Vậy nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là: $(-\infty\ ;\ -3] \cup (1\ ;\ +\infty)$.

c) *ĐS*: $\dfrac{1-\sqrt{11}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$.

3. a) $y' = 5\cos x + 3\sin x$.

b) $y' = \dfrac{(\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x)' - (\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2}$

$= \dfrac{-\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x - 2\sin x\cos x}{(\sin x - \cos x)^2}$

$= \dfrac{-2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$;

c) $y' = \cot x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$;

d) $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

e) $y' = \dfrac{(1 + 2\tan x)'}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \dfrac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1 + 2\tan x}}$.

f) $y' = \left(\sin\sqrt{1 + x^2}\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\cos\sqrt{1 + x^2} = \dfrac{x\cos\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}$.

4. a) $y' = (9 - 2x)'(2x^3 - 9x^2 + 1) + (2x^3 - 9x^2 + 1)'(9 - 2x)$

$= -2(2x^3 - 9x^2 + 1) + (6x^2 - 18x)(9 - 2x)$

$= -16x^3 + 108x^2 - 162x - 2$.

b) $y' = 7\left(6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^3}\right)(7x - 3)$.

c) $y' = \sqrt{x^2 + 1} + (x - 2)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{x^2 + 1 + x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

d) $y' = 2\tan x(\tan x)' + \dfrac{(x^2)'}{\sin^2 x^2} = 2\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{2x}{\sin^2 x^2} = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} + \dfrac{2x}{\sin^2 x^2}$.

e) $y' = -\left(\dfrac{x}{1 + x}\right)'\sin\dfrac{x}{1 + x} = -\dfrac{(1 + x) - x}{(1 + x)^2}\sin\dfrac{x}{1 + x} = -\dfrac{\sin\dfrac{x}{1 + x}}{(1 + x)^2}$.

5. $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$.

$\varphi(x) = 4x + \sin\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \varphi'(x) = 4 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \varphi'(1) = 4$. Vậy $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

6. a) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$.

Vậy $y' = 0$ (đpcm).

b) $\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right]' = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\left(\frac{\pi}{3} - x\right)'.\left[-\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right]$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$;

$= \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right]' = -\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$;

Vậy $y' = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) - 2\sin 2x$

$= \sin 2x + \sin 2x - 2\sin 2x = 0$ (đpcm).

7. a) $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x + 5$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3\sin x + 4\cos x = -5$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = -1$.

Đặt $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{4}{5} \\ \sin\varphi = \frac{3}{5} \end{cases}$, ta có phương trình $\cos x\cos\varphi - \sin x\sin\varphi = -1$

$\Leftrightarrow \cos(x + \varphi) = -1 \Leftrightarrow x + \varphi = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi - \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ $(\cos\varphi = \frac{4}{5})$

b) $f'(x) = -\cos(\pi + x) - \sin\frac{2\pi + x}{2} = \cos x + \sin\frac{x}{2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin\frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos x = \sin\left(-\frac{x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + k2\pi$;

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}.$

8. a) $f'(x) > g'(x) \Rightarrow 3x^2 + 1 > 6x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) > 0$

$\Leftrightarrow x < 0; x > 2.$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

b) $f'(x) > g'(x) \Rightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x \Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow 3x(x - 1) > 0$

$\Leftrightarrow x < 0; x > 1.$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

§4. VI PHÂN

Bài tập

1. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sqrt{x}}{a + b}$ (a, b là hằng số) ; b) $y = (x^2 + 4x + 1)\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$.

2. Tìm dy biết :

a) $y = \tan^2 x$; b) $y = \frac{\cos x}{1 - x}$.

3. Tính gần đúng các giá trị sau (Kết quả lấy đến bốn chữ số ở sau phần thập phân):

a) $\sqrt[3]{8,01}$; b) $\cos 32^0$; c) $\text{tg}44^0 52'$.

Hướng dẫn : Câu b), c) đổi số đo độ ra số đo radian.

4*. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x - \cos x$; b) $y = \frac{\sin x}{x}$; c) $y = \cos^2 2x$; d) $y = \sin\frac{1}{x}$.

5. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sin x}{1 + tgx}$; b) $y = \cos x \cot g^2 x$;

c) $y = \sin^2 x \, tgx$; d) $y = tgx + \cot gx$.

6. Tính gần đúng các giá trị sau (kết quả lấy đến bốn chữ số thập phân):

a) $\sin 45^0 30'$; b) $\cos 30^0 15'$;

c) $tg 60^0 15'$; d) $\cot g 30^0 30'$.

Hướng dẫn giải

1. Ta đã biết vi phân của hàm số $y = f(x)$ có thể viết dưới dạng: $df(x) = f'(x)\,dx$

a) $d\dfrac{\sqrt{x}}{a+b} = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{a+b}\right)' dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(a+b)} dx$.

b) $df(x) = \left[(2x+4)\left(x^2 - x\right) + (x^2 + 4x + 1)\left(2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right] dx$.

2. a) $df(x) = 2\tan x . \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$; b) $df(x) = \dfrac{-(1-x)\sin x + \cos x}{(1-x)^2} dx$

3. Từ công thức $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$ (*)

a) $\sqrt[3]{8,01}$. Xét hàm số $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Đặt $x_0 = 8$, $\Delta x = 0{,}01$.

Áp dụng công thức (*) ta được:

$$\sqrt[3]{8,01} = \sqrt[3]{8 + 0,01} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}.0,01 \approx 2 + \frac{1}{12}0,01 \approx 2,0008.$$

b) $\cos 32^0 = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{90}\right) \approx \cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6}.\dfrac{\pi}{90}$; (ở đây $x_0 = \dfrac{\pi}{6}; \Delta x = \dfrac{\pi}{90}$)

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{90} \approx \frac{90\sqrt{3} - \pi}{180} \approx 0,8486.$$

c) $\tan 44^0 52' = \tan\left[\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{1350}\right)\right] \approx \tan\frac{\pi}{4} + f'\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(-\frac{\pi}{1350}\right)$

$$\approx 1 - \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{1350}\right) \approx 1 - \frac{2}{1}.\frac{\pi}{1350} \approx \frac{1350 - 2\pi}{1350} \approx 0,9953.$$

4. a) $dy = f'(x)\,dx \Rightarrow dy = (2\cos 2x + \sin x)\,dx$.

b) $dy = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx \quad (x \neq 0)$.

c) $dy = -2\cos 2x.\sin 2x\,dx = -2\sin 4x\,dx$.

d) $dy = [4\cos 2x\,(1 + \cot^2 2x)]\,dx$ (điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$).

5. Học sinh tự làm.

6. a) $\sin 45^0 30' \approx \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{360}\right); f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(\frac{\pi}{360}\right)$

Hay $\sin 45^0 30' \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(\frac{\pi}{360}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{360} \approx \frac{360\sqrt{2} + \sqrt{2}\pi}{720}$

$$\approx \frac{\sqrt{2}(360 + \pi)}{720} \approx 0,7133.$$

b) $\cos 30^0 30' = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right); f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right).\frac{\pi}{360};$

hay $\cos 30^0 30' \approx \cos\frac{\pi}{6} - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).\frac{\pi}{360} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\pi}{360} \approx \frac{360\sqrt{3} - \pi}{720} \approx 0,8616$.

c) $\tan 60^0 15' = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{720}\right); f\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{720}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\frac{\pi}{720}.$

hay $\tan 60^0 15' \approx \tan\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}.\frac{\pi}{720} \approx \sqrt{3} + 4\frac{\pi}{720} \approx \sqrt{3} + \frac{\pi}{180} \approx \frac{180\sqrt{3} + \pi}{180} \approx 1,7495$.

d) $\cot 30^0 30' = \cot\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right)$.

Ta có $f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right).\frac{\pi}{360}$.

Hay $\cot 30^0 30' \approx \cot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}}.\frac{\pi}{360} \approx \sqrt{3} - 4\frac{\pi}{360} \approx \frac{90\sqrt{3} - \pi}{90} \approx 1,6971$.

§5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

Bài tập

1. Tìm đạo hàm với cấp hai của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x) = (x + 10)^6$, $f''(2)$; b) $f(x) = \sin 3x$, $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right), f''(0), f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

2. Tìm đạo hàm cấp ba của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{1-x}$; b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; c) $y = tgx$; d) $y = \cos^2 x$.

3*. Cho $f(x) = \sin 5x$, tính $f^{(n)}(x)$.

4. Cho $f(x) = \cos 5x$, tính $f^{(n)}(x)$.

5. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y = \sin ax + b\cos x$; b) $y = \frac{1}{ax + b}$.

6. Cho $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$, tính $f^{(n)}(x)$.

7. Cho $f(x) = x^{2007}$, tính $f^{(2006)}(x)$.

8. Cho $f(x) = (x^{48} + x^{47} + ... + x + 1)^2$. Tính $f^{(97)}(x)$.

Hướng dẫn giải

1. a) $f'(x) = 6(x + 10)^5$:

$f''(x) = 30(x + 10)^4$:

$f''(2) = 30(12)^4 = 622080.$

b) $f'(x) = 3\cos 3x \Rightarrow f''(x) = -9\sin 3x;$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9,\ f''(0) = 0,\ f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\sin\frac{\pi}{6} = -4,5.$$

2. a) $y' = \dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{\left[(1-x)^2\right]'}{(1-x)^4} = \dfrac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

$$\Rightarrow y''' = \frac{-2\left[(1-x)^3\right]'}{(1-x)^6} = \frac{6(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}.$$

b) $y' = \dfrac{-\left(\sqrt{1-x}\right)'}{1-x} = \dfrac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-2\left(\sqrt{(1-x)^3}\right)'}{4(1-x)^3} = \frac{-2\dfrac{3(1-x)^2\cdot(-1)}{2\sqrt{(1-x)^3}}}{4(1-x)^3} = \frac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}};$$

$$\Rightarrow y''' = \frac{-3\left(4\sqrt{(1-x)^5}\right)'}{16(1-x)^5} = \frac{\dfrac{-12.5.(1-x)^4\cdot(-1)}{2\sqrt{(1-x)^5}}}{16(1-x)^5} = -\frac{15}{8\sqrt{(1-x)^7}}.$$

c) $y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow y'' = \dfrac{-(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \dfrac{2\sin x.\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

$$\Rightarrow y''' = \frac{2\left[\cos^3 x.(\sin x)' - (\cos^3 x)'.\sin x\right]}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{2(\cos^3 x.\cos x + 3\cos^2 x.\sin x.\sin x)}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x(\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{2(1 + 2\sin^2 x)}{\cos^4 x}.$$

d) $y = \cos^2 x \Rightarrow y' = -2\cos x.\sin x = -\sin 2x;$

$$y'' = -2\cos 2x \Rightarrow y''' = 4\sin 2x.$$

3. $f(x) = \sin 5x \Rightarrow f'(x) = 5\cos 5x = 5\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$f''(x) = 5^2.\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = 5^2.\sin\left(5x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

Vậy: $f^{(n)}(x) = 5^n.\sin\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right);$

Ta phải chứng minh công thức này bằng quy nạp:

* Với $n = 1$, $f'(x) = 5\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = 5\cos 5x.$

Vậy công thức đúng với $n = 1$.

* Giả sử công thức đúng với $n = k \geq 1$ thì: $f^{(k)}(x) = 5^k.\sin\left(5x + \frac{k\pi}{2}\right)$

* Ta phải chứng minh công thức cũng đúng với $n = k + 1$ nghĩa là:

$$f^{(k+1)}(x) = 5^{k+1}.\sin\left(5x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Thật vậy: $f^{(k+1)} = [f^{(k)}]' = = 5^k.5.\cos\left(5x + \frac{k\pi}{2}\right) = 5^{k+1}.\sin\left(5x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= 5^{k+1}.\sin\left(5x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Do đó công thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. $f(x) = \cos 5x = \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$, áp dụng kết quả của bài 3:

$$f^{(n)}(x) = 5^n.\sin\left(5x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right);$$

5. a) $y = \sin ax + \cos bx$

$$\Rightarrow y' = a\cos ax - b\sin bx = a\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -a^2\sin ax - b^2\cos bx = a^2\sin\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right) + b^2\cos\left(bx + \frac{2\pi}{2}\right)$$

Dự đoán: $y^{(n)} = a^n\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + b^n\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)$. Học sinh tự chứng minh công thức này bằng quy nạp.

b) $y = \frac{1}{ax+b} \Rightarrow y' = \frac{-a}{(ax+b)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2a^2}{(ax+b)^3}$.

Dự đoán: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

6. $f(x) = \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$. Áp dụng kết quả 5 b) ta có :

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 1^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!(-1)^n}{(1-x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

7. Không khó khăn lắm ta có:

$$f(x) = x^k,\ f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)x^{k-n}.$$

Vậy $f(x) = x^{2007}$, $f^{(2006)}(x) = 2007.2006.2005\ldots1.x^{2007-2006} = 2007!.x$.

Từ đó suy ra: $f^{(2007)}(x) = 2007!$; $f^{(2008)}(x) = 0$.

8. $f(x) = (x^{48} + x^{47} + \ldots + x + 1)^2$

$f'(x) = x^{96} + x^{94} + \ldots + x^2 + 1 + 2(x^{95} + x^{94} + \ldots + 2x) \Rightarrow f^{(97)}(x) = 0.$

ÔN TẬP CHƯƠNG V

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5$; b) $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$; c) $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$;

d) $y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)$; e) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$; f) $y = \frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$.

2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2\sqrt{x}\sin x - \frac{\cos x}{x}$; b) $y = \frac{3\cos x}{2x + 1}$; c) $y = \frac{t^2 + 2\cos t}{\sin t}$;

d) $y = \frac{2\cos\varphi - \sin\varphi}{3\sin\varphi + \cos\varphi}$; e) $y = \frac{\tan x}{\sin x + 2}$; f) $y = \frac{\cot t}{2\sqrt{t} - 1}$.

3. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Tính f(3) + (x − 3)f'(3).

4. Cho hàm số f(x) = tanx và $g(x) = \frac{1}{1 - x}$. Tính $\frac{f'(0)}{g'(0)}$.

5. Giải phương trình f'(x) = 0 biết rằng: $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$.

6. Cho $f_1(x) = \frac{\cos x}{x}$, $f_2(x)$ = xsinx. Tính $\frac{f_1'(1)}{f_2'(1)}$.

7. Viết phương trình tiếp tuyến:

a) Với hyperbol $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ tại điểm A(2; 3);

b) Với đường cong $y = x^3 + 4x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$;

c) Với parabol $y = x^2 - 4x + 4$ tại điểm có tung độ $y_0 = 1$.

8. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - t^2 - 9t$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét.

a) Tính vận tốc khi t = 2s ;

b) Tính gia tốc khi t = 3s ;

c) Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu ;

d) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

9. Cho hai hàm số: $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng

Tính góc giữa hai tiếp tuyến kể trên.

10*. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{A\sin^2 x}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 4x + B & \text{khi } x \le 0 \end{cases}$

a) Xác định A và B để hàm số liên tục tại mọi điểm x.

b) Xác định A và B để hàm số có đạo hàm f'(x) tại mọi điểm x. Chứng minh rằng khi đó f'(x) là một hàm số liên tục tại mọi điểm x.

11. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y = mx^3 - 3x$.

a) Chứng minh rằng tồn tại một điểm cố định mà tất cả các đường cong (Cm) đều đi qua, với mọi m.

b) Chứng minh rằng tại điểm cố định đó, tất cả các đường cong (Cm) đều có chung một tiếp tuyến.

12. Hai đường cong (C), (C'), đồ thị của hàm số y = f(x), y = g(x), gọi là tiếp xúc với nhau tại điểm $A(x_0, y_0)$ nếu:

a) A là một điểm chung của (C) và (C');

b) (C) và (C') có tiếp tuyến chung tại điểm A.

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng hoành độ của điểm A nói trên là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

Câu hỏi 2: Chứng tỏ rằng các hàm $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^3 - 2x + 5$ có đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm A(2; 9).

Bài tập trắc nghiệm

Tìm các câu trả lời đúng trong các bài tập sau:

1. Với $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$; g'(2) bằng:

(A): 1; (B): −3; (C): −5; (D): $\not\exists$.

2. Nếu $f(x) = \sin^3 x + x^2$ thì $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng:

(A): 0; (B): 1; (C): −2; (D): 5.

3. Giả sử $h(x) = 5(x + 1)^2 + 4(x + 1)$.

Tập nghiệm của phương trình h''(x) = 0 là:

(A) [-1; 2]; (B) $(-\infty; 0]$ (C) {−1}; (D) O.

4. Cho $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$.

Nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 0$ là:

(A): O; (B): $(0; +\infty)$; (C): [−2; 2] (D): $(-\infty; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

1. a) $y' = x^2 - x + 1$.

b) $y' = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{168}{49x^5} = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{24}{7x^5}$.

c) $y' = \dfrac{4x(6x-6) - (3x^2 - 6x + 7).4}{16x^2} = \dfrac{12x^2 - 28}{16x^2} = \dfrac{3x^2 - 7}{4x^2}$.

d) $y' = \left(-\dfrac{2}{x^2} + 3\right)\left(\sqrt{x} - 1\right) + \left(\dfrac{2}{x} + 3x\right)\dfrac{\sqrt{x}}{2.x}$

$= -\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2} + 3\sqrt{x} + \dfrac{2}{x^2} - 3 + \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} + \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

$$= \frac{-4\sqrt{x} + 6x^2\sqrt{x} + 4 - 6x^2 + 2\sqrt{x} + 3x^2\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{9x^2\sqrt{x} - 6x^2 - 2\sqrt{x} + 4}{2x^2}.$$

e) $y' = \dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})' - (1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2} = \dfrac{(1-\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + (1+\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.$$

f) ĐS: $\dfrac{-4x^2 - 10x + 15}{(x^2 - 3x)^2}$.

2. a) $y' = 2\sqrt{x}\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x - \dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$

$$= \frac{2x^2\sqrt{x}\cos x + x\sqrt{x}\sin x + x\sin x + \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{(2x^2\sqrt{x} + 1)\cos x + (x\sqrt{x} + 1)\sin x}{x^2}.$$

b) *ĐS:* $y' = \dfrac{-6\cos x - 3(2x+1)\sin x}{(2x+1)^2}$.

c) $y' = \dfrac{\sin t(2t - 2\sin t) - (t^2 + 2\cos t)\cos t}{\sin^2 t}$

$$= \frac{2t\sin t - 2\sin^2 t - t^2\cos t - 2\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{2t\sin t - t^2\cos t - 2}{\sin^2 t}.$$

d) *ĐS:* $y' = -\dfrac{7}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$.

e) $y' = \dfrac{2 + \sin^3 x}{\cos^2 x(\sin x + 2)^2}$.

f) $y' = \dfrac{-(2\sqrt{t} - 1)\dfrac{1}{\sin^2 x} - \cot t.\dfrac{1}{\sqrt{t}}}{(2\sqrt{t} - 1)^2} = \dfrac{\dfrac{1 - 2\sqrt{t}}{\sin^2 x} - \dfrac{\cot t}{\sqrt{t}}}{(2\sqrt{t} - 1)^2}$.

3. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(3) = \frac{1}{4}$.

$f(3) = 2$. Vậy $f(3) + (x - 3)f'(3) = 2 + \frac{x-3}{4} = \frac{x+5}{4}$.

4. $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(0) = 1$.

$g(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow g'(0) = 1$; Vậy: $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

5. $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$

$f'(x) = 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{192}{x^4}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{192}{x^4} = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 3x^4 - 60x^2 + 192 = 0 \ (2) \end{cases}$$

Giải (2): Đặt $t = x^2 \Rightarrow t \geq 0$. Vậy ta có phương trình:

$$3t^2 - 60t + 192 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 16 \\ t = 4 \end{bmatrix}$$

- $t = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$;
- $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$;

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm $x = \pm 4$, $x = \pm 2$.

6. $f_1(x) = \frac{\cos x}{x}$, nên $f_1'(x) = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} \Rightarrow f_1'(1) = -\sin 1 - \cos 1$

$f_2(x) = x\sin x$, nên $f_2'(x) = x\cos x + \sin x \Rightarrow f_2'(1) = \cos 1 + \sin 1$;

Vậy: $\frac{f_1'(1)}{f_2'(1)} = \frac{-(\sin 1 + \cos 1)}{(\sin 1 + \cos 1)} = -1$.

7. a) Điểm $A(2 ; 3) \in (H)$ (H có phương trình $y = \frac{x+1}{x-1}$).

Vậy phương trình tiếp tuyến của (H) tại điểm A là:

$$y - 3 = y'_{(2)}(x - 2) \text{ mà } y'_{(2)} = -2.$$

Nên ta có phương trình: $y = -2(x - 2) + 3 \Rightarrow y = -2x + 7$ hay $2x + y - 7 = 0$.

b) $x_0 = -1$, $y = x^3 + 4x^2 - 1 \Rightarrow y_0 = 2$

$y' = 3x^2 + 8x \Rightarrow y'(-1) = -5.$

Nên phương trình tiếp tuyến tại điểm $(-1; 2)$ là:

$$y - 2 = -5(x + 1) \Rightarrow 5x + y + 3 = 0.$$

c) $y = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow y = (x - 2)^2$ mà $y_0 = 1 \Rightarrow 1 = (x_0 - 2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = 1 \end{array}\right.$

Vậy ta phải viết phương trình tiếp tuyến với (P): $x^2 - 4x + 4$ tại hai điểm A(3; 1), B(1; 1).

Ta có: $y' = 2x - 4 \Rightarrow y'(3) = 2$, $y'(1) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến tại A(3; 1) là:

$$y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow -2x + y + 5 = 0.$$

Phương trình tiếp tuyến tại B(1; 1) là: $2x + y - 3 = 0$.

8. $S = t^3 - 3t^2 - 9t$.

$v_t = S'_{(t)} = 3t^2 - 6t - 9$, $a = v'_t = S''_{(t)} = 6t - 6$.

a) $v_2 = 3.2^2 - 6.2 - 9 = -9$ (m/s)

b) $a_{(3)} = 6.3 - 6 = 12$ (m/s^2)

c) $v_{(t)} = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3; t = -1$ (loại)

$a_{(3)} = 12$ (m/s^2).

d) $a(t) = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$;

$v(1) = 3.(1)^2 - 6(1) - 9 = -12$ (m/s).

9. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$; $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$.

Giao điểm của hai hàm số đã cho là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

a) Hàm số $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2}} \Rightarrow y' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2x^2} \Rightarrow y'(1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ là:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{2}x + 2y - 2\sqrt{2} = 0.$$

b) Hàm số $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{\sqrt{2}} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(1; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ là:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{2}x - y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Như a) ta biết $y'(1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, đây chính là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ tại điểm $\left(1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Gọi góc giữa tiếp tuyến và chiều dương của trục hoành là φ_1 thì $\tan\varphi_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tương tự ta có $\tan\varphi_2 = \sqrt{2}$. Gọi góc giữa hai đường thẳng này là: $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{1 + \tan\varphi_1.\tan\varphi_2} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{1 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}\right)} = \infty \Rightarrow \varphi = 90^0$$

10. a) Khi $x > 0$ thì $f(x)$ liên tục.

Khi $x < 0$ thì $f(x)$ liên tục.

Ta xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{A\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{A\sin x}{x}.\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(4x + B) = B, f(0) = B.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$ khi $B = 0$, A bất kỳ.

Cho nên muốn $f(x)$ liên tục với mọi x thì $B = 0$, A bất kỳ.

b) Ta có: $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax\sin 2x - A\sin^2 x}{x^2} & \text{nếu } x > 0 \\ 4 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A\sin^2 \Delta x}{\Delta^2 x} = A;$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4.$$

Vậy muốn $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$ thì $\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow A = 4$, khi đó $f'(x)$ liên tục với mọi x.

11. a) Từ $y = mx^3 - 3x$ (Cm) $\Rightarrow$ $y - mx^3 + 3x = 0$, ta luôn có $x = 0$, $y = 0$ $\forall m$ nên (Cm) đi qua điểm O(0; 0).

b) Điểm $(0; 0) \in$ (Cm) : $y'(x) = 3mx^2 - 3 \Rightarrow y'(0) = -3$.

Vậy tại điểm O(0; 0), (Cm) có một tiếp tuyến $y = -3x$.

12. *Câu hỏi 1:*

$A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của (C) ($y = f(x)$) và (C') ($y = g(x)$) thì $A \in$ (C) và $A \in$ (C') nên $\left.\begin{matrix} y_0 = f(x_0) \\ y_0 = g(x_0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$ hay x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Tại $A(x_0; y_0)$ (C') và (C) có tiếp tuyến chung, nghĩa là $k_1 = k_2 \Rightarrow f'(x) = g'(x)$ hay x_0 là nghiệm của pt: $f'(x) = g'(x)$.

Vậy x_0 là hoành độ của điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

Câu hỏi 2: Áp dụng kết quả câu 1, ta phải xem xét 2 có phải là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x - 3 = x^3 - 2x + 5 \\ 4x + 2 = 3x^2 - 2 \end{cases}$$

Rõ ràng 2 nghiệm đúng hệ pt này và $x = 2 \Rightarrow y = 9$. Nên điểm A(2; 9) là tiếp điểm của hai đường cong tương ứng là đồ thị của hai hàm trên.

Bài tập trắc nghiệm

1. $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{(x-1)(2x-2) - (x^2 - 2x + 5)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

Vậy $g'(2) = -3$. Đáp án (B) đúng.

2. $f(x) = \sin^3 x + x^2 \Rightarrow f'(x) = 3\sin^2 x.\cos x + 2x$

$$f''(x) = 6\sin x.\cos^2 x - 3\sin^3 x + 2$$

$f''(-\dfrac{\pi}{2}) = 5$. Đáp án (D) đúng.

3. $h(x) = 5(x + 1)^2 + 4(x + 1)$

$h'(x) = 10(x + 1) + 4$, $h''(x) = 10 \ \forall x$.

Vậy $h''(x) = 0$ vô nghiệm. Đáp án D đúng.

4. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x \Rightarrow f'(x) = x^2 + x + 1$

$f'(x) > 0 \ \forall x$ (do $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, $a = 1 > 0$).

Vậy $f'(x) \le 0$ vô nghiệm, nên tập nghiệm của bất phương trình này là $\emptyset$. Đáp án A đúng.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I. Câu hỏi

1. Nêu định nghĩa các hàm số lượng giác. Chỉ rõ tập xác định và tập giá trị của từng hàm số đó.

2. Viết chu kì tuần hoàn của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

Từ đó suy ra chu kì của các hàm số sau: $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; $y = \tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Nêu cách giải các phương trình lượng giác cơ bản, cách giải các phương trình dạng $a\sin x + b\cos x = c$.

4. Viết công thức tính số hoán vị của tập gồm n phần tử ($n > 1$). Nêu ví dụ.

5. Viết công thức tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử, công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử. Cho ví dụ.

6. Viết công thức nhị thức Niu-tơn.

7. Phát biểu định nghĩa xác suất của biến cố.

8. Nêu rõ quy trình chứng minh bằng phương pháp qui nạp toán học và cho ví dụ.

9. Phát biểu định nghĩa cấp số cộng và công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng.

10. Phát biểu định nghĩa cấp số nhân và công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân.

11. Dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện gì thì được gọi là giới hạn 0 khi $n \to +\infty$.

12. Viết công thức tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

13. Định nghĩa hàm số giới hạn $+\infty$ khi $x \to -\infty$.

14. Nêu các giới hạn đặc biệt của dãy số và của hàm số.

15. Nêu định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm, trên một khoảng. Nêu hình ảnh hình học của hàm số liên tục trên một khoảng.

16. Phát biểu định nghĩa đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$.

17. Viết tất cả các quy tắc tính đạo hàm đã học.

18. Giả sử f(x) là hàm số có đạo hàm tại x_0. Hãy viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại $M_0(x_0, f(x_0))$.

II. Bài tập

1. Cho hàm số $y = \cos 2x$.

a) Chứng minh rằng $\cos 2(x + k\pi) = \cos 2x$ với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos 2x$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = \frac{\pi}{3}$.

c) Tìm tập xác định của hàm số $z = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos^2 2x}}$.

2. Cho hàm số $y = \frac{5}{6+7\sin 2x}$.

a) Tính $A = \frac{5}{6+7\sin 2x}$, biết rằng $\tan a = 0{,}2$.

b) Tính đạo hàm của hàm số đã cho.

c) Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số đã cho.

3. Giải các phương trình:

a) $2\sin\frac{x}{2}\cos^2 x - 2\sin\frac{x}{2}\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

b) $3\cos x + 4\sin x = 5$;

c) $\sin x + \cos x = 1 + \cos x \sin x$;

d) $\sqrt{1-\cos x} = \sin x \ (x \in [\pi; 3\pi])$;

e) $\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0$.

4. Trong một bệnh viện ngoại khoa có 40 bác sĩ làm việc. Hỏi có bao nhiêu cá chia ca mổ, nếu mỗi ca gồm:

a) Một bác sĩ mổ và một bác sĩ phụ mổ?

b) Một bác sỹ mổ và bốn bác sĩ phụ mổ?

5. Tìm trong khai triển của nhị thức: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ số hạng không chứa a.

6. Chọn ngẫu nhiên ba học sinh từ một tổ gồm có sáu nam và bốn nữ. Tính xác suất sao cho:

a) Cả ba học sinh đều là nam; b) Có ít nhất một nam.

7. Một tiểu đội có 10 người được sắp xếp ngẫu nhiên thành hàng dọc, trong đó có anh A và anh B. Tính xác suất sao cho:

a) A và B đứng liền nhau;

b) Trong hai người đó có một người đứng ở vị trí số 1 và người kia đứng ở vị trí cuối cùng.

8. Tìm cấp số cộng tăng, biết rằng tổng ba số hàng đầu của nó bằng 27 và tổng bình phương của chúng bằng 275.

9. Cho biết trong một cấp số nhân, hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ hai bằng 12 và nếu thêm 10 vào số hạng thứ nhất, thêm 8 vào số hạng thứ hai còn giữ nguyên số hạng thứ ba thì ba số mới lập thành một cấp số cộng. Hãy tính tổng của năm số hạng đầu của cấp số nhân đã cho.

10. Tính các giới hạn:

a) $\lim\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{7^{n-1}}\right)$;

b) $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+...+\frac{n-1}{n^2+1}\right)$; c) $\lim\frac{\sqrt[3]{4+3n+n^6}}{1+3n+2n^2}$.

11. Tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

12. Giải các phương trình:

a) $f'(x) = g(x)$ với $f(x) = \sin^3 2x$ và $g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x$;

b) $f'(x) = 0$ với $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\sin 4x$.

13. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

13. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$;

b) $y = \dfrac{\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $y = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x$;

d) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

14. Tính đạo hàm cấp ba của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$;

b) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$;

c) $y = \sin ax$ (a là hằng số);

d) $y = \sin^2 x$.

15. Cho hàm số: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C)

Hãy xác định các số b, c, d biết rằng đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $(-1; -3)$, $(1; -1)$ và $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$.

16. Cho các hàm số:

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C)

$g(x) = x^2 - 30 + 1$.

Với các số b, c, d tìm được ở bài 13 hãy:

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số f(x) tại điểm có hoành độ $x = -1$.

b) Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$.

c) Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(\sin 5x)+1}{g'(\sin 3x)+3}$

Biết rằng: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Hướng dẫn giải

I. Câu hỏi

1. Học sinh tự làm.

2. Chu kỳ của các hàm số y = sinx, y = cosx có chu kỳ là 2π.

Chu kỳ của các hàm số y = tanx, y = cotx có chu kỳ là π.

Học sinh tự chứng minh hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha)$ có chu kỳ là $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và hàm số :

$$y = A\tan(\omega x + \alpha) \text{ có chu kỳ là } \frac{\pi}{|\omega|}.$$

Từ đó suy ra hàm số y = $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ có chu kỳ là T = $\frac{2\pi}{2} = \pi$ và hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ $T = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$.

Hoặc chứng minh: π là chu kỳ của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ có nghĩa là phải chứng minh:

$$\sin\left[2(x + \pi) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Và $T = \pi$ là số dương nhỏ nhất trong các số T có tính chất trên. Đối với hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ cũng chứng minh tương tự.

3. Học sinh tự làm.

4. Công thức tính số hoán vị vủa một tập gồm n phần tử là: P = n! = n(n – 1)(n – 2) ... 1.

Ví dụ: Tính số các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau cấu tạo bởi các chữ số 1, 2, 3 là 3! = 3.2.1 = 6. Cụ thể là: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

5. $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ (1) hay $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (2) với n, k $\in \mathbb{Z}$ và $1 \leq k < n$.

A_n^k gọi là chỉnh hợp chập k của n phần tử.

• Nếu quy ước 0! = 1 thì công thức (2) vẫn còn đúng với n = k.

• Ngoài ra người ta cũng quy ước $A_n^0 = 1$. Khi đó (2) đúng cho cả k = 0. Vậy công thức (2) đúng với $0 \leq k \leq n$.

Ví dụ: Với các chữ số 0, 1, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau.

Giải: Có $A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 1.2.3.4 = 24$ số có ba chữ số khác nhau từ tập các chữ số {0, 1, 3, 5} có thể bắt đầu từ chữ số 0.

Có $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 1.2.3 = 6$ số có ba chữ số bắt đầu từ chữ số.

Vậy có 24 − 6 = 18 số có ba chữ số khác nhau.

Công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử là:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (3) với } 1 \leq k \leq n.$$

Người ta quy ước $C_n^0 = 0$. Với quy ước này công thức (3) cũng đúng với k = 0. Vậy công thức (3) đúng với $0 \leq k \leq n$.

Ví dụ: Trong một thập giác lồi ta kẻ tất cả các đường chéo. Tìm số giao điểm của các đường chéo này, biết rằng không có ba đường chéo nào trong chúng đồng quy.

Giải: Ta biết mỗi giao điểm của hai đường chéo ứng với 4 đỉnh của đa giác và cứ 4 đỉnh của đa giác thì có hai đường chéo và ứng với 1 giao điểm của hai đường chéo này (vì biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy).

Vậy số giao điểm phải tìm là $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{1.2.3...10}{1.2.3.4.1.2.3.4.5.6} = 210$ (điểm).

6. Công thức của nhị thức Niu-tơn:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^k a^{n-k}b^k + ... + C_n^k b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k ; \frac{(n+1)n}{2} ; \frac{(1+1).1}{2} = 1 ; S_k = \frac{(k+1)k}{2}.$$

7. Học sinh tự làm.

8. Quy trình chứng minh bằng quy nạp:

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với n =1.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với n = k + 1.

Ví dụ: Chứng minh rằng $1+ 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1)n}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải: Bước 1: Khi n = 1, vế trái chỉ có một số hạng bằng 1, vế phải $\frac{(1+1)1}{2} = 1$. Vậy công thức đúng với n = 1.

Bước 2: Đặt vế trái bằng S_n. Giả sử hệ thức đúng với $n = k \geq 1$ nghĩa là $S_{k+1} = \frac{(k+1)k}{2}$ (giả thiết quy nạp).

Ta phải chứng minh hệ thức cũng đúng với n = k +1 nghĩa là:

$$S_{k+1} = \frac{[(k+1)+1](k+1)}{2}.$$

Thật vậy: $S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 = S_k + k + 1$

$$= \frac{(k+1)k}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(2+k)}{2} = \frac{[(k+1)+1](k+1)}{2} \text{ (đpcm)}$$

Vậy hệ thức đã cho đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Các câu từ **9 - 18**: Học sinh tự làm.

II. Bài tập

1. Học sinh tự làm.

2. a) $A = \dfrac{5}{6 + 7\sin 2a}$. Ta biết $\sin 2a = \dfrac{2t}{1+t^2}$ với $t = \tan a = 0{,}2$.

Vậy $\sin 2a = \dfrac{0{,}4}{1{,}04} = \dfrac{5}{13} \Rightarrow A = \dfrac{5}{6 + 7\dfrac{5}{13}} = \dfrac{5}{\dfrac{113}{13}} = \dfrac{65}{113} \approx 0{,}5752$.

b) $y = \dfrac{5}{6+7\sin 2x} \Rightarrow y' = \dfrac{-5(6+7\sin 2x)'}{(6+7\sin 2x)^2} = \dfrac{-70\cos 2x}{(6+7\sin 2x)^2}$.

c) Hàm số nghịch biến trong các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

3. a) $2\sin\dfrac{x}{2}\cos^2 x - 2\sin\dfrac{x}{2}\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{x}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(2\sin\dfrac{x}{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x = 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

• $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

• $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

• $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k4\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + k4\pi \end{array}\right.$

Tổng hợp trên đường tròn đơn vị ta được tập nghiệm của phương trình là:

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} + k4\pi; \frac{5\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $3\cos x + 4\sin x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = 1$. Đặt $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ta có:

$$\sin\alpha.\cos x + \cos\alpha\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha + x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}, \alpha = \arccos\frac{4}{5}.$$

Tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}, \alpha = \arccos\frac{4}{5}\right\}$.

c) Đặt $\sin x + \cos x = t \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$, $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Ta có phương trình: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \tan\alpha\cos x = 1$ với $\tan\alpha = 1$ $(\alpha = \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi \\ x + \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + l2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Tập nghiệm của phương trình là: $\{k2\pi; \frac{\pi}{2} + l2\pi; k, l \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$. Muốn phương trình có nghiệm $\sin x \ge 0$. Trong đoạn $[\pi; 3\pi]$ thì $x \in [2\pi; 3\pi]$ và $\cos x \le 1$. Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$1 - \cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos x=1\Leftrightarrow x=l2\pi\end{array}\right.\quad (k,l\in\mathbb{Z})$$

Căn cứ vào điều kiện để phương trình có nghiệm và $x \in [\pi; 3\pi]$ ta có: $x=\dfrac{5\pi}{2}$, $x = 2\pi$.

Vậy trong đoạn $[\pi; 3\pi]$ tập nghiệm của phương trình là: $\left\{2\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right\}$.

e) $(\cos\dfrac{x}{4}-2\sin x)\sin x+(1+\sin\dfrac{x}{4}-2\cos x)\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{4}\sin x+\sin\dfrac{x}{4}\cos x-2(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{5x}{4}+\cos x=2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\dfrac{5x}{4}=1\\ \cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{5}+k\dfrac{8\pi}{5}\\ x=l2\pi\end{cases}\quad (k,l\in\mathbb{Z})$

Phải có: $l2\pi=\dfrac{2\pi}{5}+k\dfrac{8\pi}{5}\Leftrightarrow 2l=\dfrac{2}{5}+k\dfrac{8}{5}$

$5l = 1 + 4k$ chọn $l = 1+ 4m$ và $k = 1 + 5m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{2\pi + m8\pi, m \in \mathbb{Z}\}$.

4. a) Trong 40 bác sĩ chia ca mổ gồm 2 bác sĩ (một bác sĩ mổ và một bác sĩ phụ mổ) cho ta một chỉnh hợp chập 2 của 40 phần tử. Như vậy số cách chia ca mổ là $A_{40}^2=\dfrac{40!}{38!}=1560$.

b) Số cách chia là $40.C_{39}^4$.

Mỗi ca mổ có một bác sĩ mổ, mà có 40 bác sĩ. Vậy có C_{40}^1 cách chia. Mỗi ca mổ có 4 bác sĩ phụ mổ, mà có 39 bác sĩ thì số cách chia là C_{39}^4.

Như vậy có tất cả $C_{40}^1\ C_{39}^4$ cách chia hay $40.C_{39}^4$ cách chia.

5. Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}=\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{3}{4}}\right)^{17}=\sum_{i=0}^{17}C_{17}^{i}\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{i}\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{17-i}=\sum_{i=0}^{17}C_{17}^{i}a^{\frac{51}{4}-\frac{17}{12}i}$

Số hạng không chứa a trong khai triển này ứng với số mũ của a bằng 0, tức là:

$$\frac{51}{4}-\frac{17}{12}i=0\Leftrightarrow i=\frac{51}{4}\times\frac{12}{17}=9.$$

Do đó số hạng không chứa a là: C_{17}^{9}.

6. Học sinh tự làm.

7. Học sinh tự làm.

8. ÷ $u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n, ...$ với $u_n > u_{n-1}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$.

$u_1 + u_2 + u_3 = 27$. Theo tính chất của cấp số cộng ta có:

$$u_1 + u_3 = 2u_2 \Rightarrow 3u_2 = 27 \Rightarrow u_2 = 9 \text{ và } u_1 + u_3 = 18.$$

Theo đề bài ta có: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \Rightarrow u_1^2 + u_3^2 = 275 - 81 = 194$.

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1+u_3=18 & (1) \\ u_1^2+u_3^2=194 & (2) \\ u_1<9 & (3) \end{cases}$

Rút u_1 từ (1) ta có: $u_3 = 18 - u_1$ thay biểu thức này vào (2) ta có: $u_1^2 + (18 - u_1)^2 - 194 = 0$

$$\Leftrightarrow u_1^2 - 18u_1 + 65 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ u_1=13 \text{ (loại do (3))} \end{cases}$$

Như vậy cấp số cộng với $u_1 = 5, d = 4$. Ta có cấp số cộng: ÷ 5, 9, 13, ...

9. Theo đề bài ta có: ∴ $u_1, u_2, u_3, ...$ với $u_3 - u_2 = 12$.

Và ÷ $u_1 + 10, u_2 + 8, u_3, ...$

Trong cấp số cộng $d = u_3 - (u_2 + 8) = u_3 - u_2 - 8 = 12 - 8 = 4$ và $u_2 + 8 - (u_1 + 10) = 4$ $\Leftrightarrow u_2 - u_1 = 6$.

Trong cấp số nhân $u_2 - u_1 = u_1 (q - 1) = 6.$

Cùng trong cấp số nhân $u_3 - u_2 = u_1 (q^2 - q) = 12$ }

$$\Rightarrow \frac{1}{q}=\frac{1}{2} \Rightarrow q = 2, \Rightarrow u_1 = 6.$$

Theo công thức tính tổng của cấp số nhân hữu hạn: $S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$ với $q \neq 1.$

$$S_5=\frac{6(1-2^5)}{1-2}=6.31=186.$$

10. Ta thấy dãy số: $1,-\frac{1}{7},\frac{1}{49},...,(-1)^{n-1}\frac{1}{7^{n-1}}$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q=-\frac{1}{7}$ $\left(|q|=\frac{1}{7}\right)$

Do đó $\lim\left(1,-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{7^{n-1}}\right)=\lim S_n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{7}\right)}=\frac{7}{8}.$

b) $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+...+\frac{n-1}{n^2+1}\right)=\lim\frac{1+2+3+...+(n-1)}{n^2+1}$

$$=\lim\frac{n(n-1)}{2(n^2+1)}=\lim\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

c) $\lim\frac{\sqrt[3]{4+3n+n^6}}{1+3n+2n^2}=\lim\frac{n^2\sqrt[3]{\frac{4}{n^6}+\frac{3}{n^5}+1}}{2n^2\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{3}{2n}+1\right)}=\frac{1}{2}.$

11. a) Ta có: $x^n-1=(x-1)\underbrace{(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)}_{n \text{ số hạng}}$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1+x^2-1+x^3-1+...+x^n-1}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1}(x-1)\left[\frac{1+(1+x)+(x^2+x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}1+(1+x)+(x^2+x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)=1+2+3+...+n=\frac{(n+1)n}{2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$.

Nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp của cả $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ và $\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}$, ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-\sin x+1}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$.

Do $2\sin^2x + \sin x - 1 = (\sin x + 1)(2\sin x - 1)$ và $2\sin^2x - 3\sin x + 1 = (\sin x - 1)(2\sin x - 1)$

Nên: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-\sin x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{(\sin x+1)(2\sin x-1)}{(\sin x-1)(2\sin x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x+1}{\sin x-1}=-3$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$ có dạng $(\infty - \infty)$.

Nhân biểu thức với $\dfrac{x+\sqrt{x^2+5x}}{x+\sqrt{x^2+5x}}$, ta có :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\frac{x+\sqrt{x^2+5x}}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=-\frac{5}{2}.$$

12. a) $f(x) = \sin^3 x \Rightarrow f'(x) = 3\sin^2 2x.2\cos 2x = 6\sin^2 x.\cos 2x$.

Phương trình $f'(x) = g(x)$ suy ra $6\sin^2 2x.\cos 2x = 4\cos 2x - 5\sin 4x$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 2x\cos 2x - 4\cos 2x + 10\sin 2x\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x(3\sin^2 2x + 5\sin 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + l\dfrac{\pi}{2},\ l \in \mathbb{Z} \\ 3\sin^2 x - 5\sin 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -2 \ (\text{loại}) \\ \sin 2x = \dfrac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3} + k\pi \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

$$\left\{\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi;\ l,k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$

$$f'(x) = -60\sin 3x - 60\sin 5x + 60\sin 4x$$

$$= -60(\sin 3x + \sin 5x) + 60\sin 4x$$

$$= -120\sin 4x.\cos x + 60\sin 4x$$

$$= -120\sin 4x.\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 240\sin 4x.\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{6}\right).\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin 4x.\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right).\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(4x)=0 \quad \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{4} \\ \sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+l2\pi \quad (k,l\in\mathbb{Z}) \\ \sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+l2\pi \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{k\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}+l2\pi, k, l\in\mathbb{Z}\}$.

13. .a) $y'=\dfrac{(\cos^2 3x)'}{\cos^4 3x}=\dfrac{6\cos 3x\sin 3x}{\cos^4 3x}=\dfrac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$

b) $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}.\left(\cos\sqrt{x^2+1}\right)'-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\cos\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$.

$$=\frac{-\sqrt{x^2+1}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sin\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cos\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$$

$$=\frac{-x(\sqrt{x^2+1}\sin\sqrt{x^2+1}+\cos\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$$

c) $y'=(2-x^2)'\cos x+(2-x^2)(\cos x)'+(2x)'\sin x+2x(\sin x)'$

$$=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x+2\sin x+2x\cos x = x^2\sin x$$

d) $y'=\dfrac{(\cos x+x\sin x)(\sin x-x\cos x)'-(\cos x+x\sin x)'(\sin x-x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}$

$$=\frac{(\cos x+x\sin x)(\cos x-\cos x+x\sin x)-(-\sin x+\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x+x\sin x)x\sin x-(\sin x-x\cos x)x\cos x}{(\cos x+x\sin x)^2}=\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

$$= \frac{x\cos x\sin x + x^2\sin^2 x - x\cos x\sin x + x^2\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

14. a) $y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x+1)^2}, y'' = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$

$y''' = \frac{-6(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-6}{(x+1)^4} = -\frac{1.2.3}{(x+1)^4}$.

b) $y = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$

$y''' = \frac{-1.2.3}{x^4} + \frac{1.2.3}{(1-x)^4}$.

c) $y = \sin ax \Rightarrow y' = a\cos ax, y'' = -a^2\sin ax, y''' = -a^3\cos ax$.

d) $y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$; $y'' = 2\cos 2x, y''' = -4\sin 2x$.

15. $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C) $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$.

(C) đi qua (-1;-3), (1,-1) và $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} -1 + b - c + d = -3 & (1) \\ 1 + b + c + d = -1 & (2) \\ \frac{1}{3} + \frac{2b}{3} + c = 0 & (3) \end{cases}$$

Trừ vế với vế của (2) với (1) ta có $2 + c = 2 \Rightarrow c = 0$.

Thay vào (3) ta có $b = -\frac{1}{2}$, thay $c = 0$, $b = -\frac{1}{2}$ vào (2) ta có :

$$1 - \frac{1}{2} + d = -1 \Rightarrow d = -\frac{3}{2}.$$

Vậy ta có $b = -\frac{1}{2}, c = 0, d = -\frac{3}{2}$.

16. a) $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C) Thay các hệ số b, c, d, ở kết quả bài 15 ta có:

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 1$$

Với $x_o = -1 \Rightarrow y_o = f(x_o) = f(-1) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -3$

$f'(x) = 3x^2 - x$, $f'(-1) = 4$

Vậy phương trình của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại (-1;-3) là:

$$y = 4(x + 1) y = 4(x + 1) - 3 \Rightarrow y = 4x + 1$$

b) $f'(\sin x) = 0 \Rightarrow 3\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{1}{3} + 2l\pi \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + m2\pi \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của $f'(\sin x) = 0$ là:

$$\left\{k\pi, \arcsin\frac{1}{3} + l2\pi, \pi - \arcsin\frac{1}{3} + m2\pi, k, l, m \in Z\right\}$$

c) $f'(x) = 6x - 1, g'(x) = 2x - 3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin 5x) + 1}{g'(\sin 3x) + 3} = \frac{6\sin 5x}{2\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 5x}{\frac{\sin 3x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{15\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}} = \frac{15}{3} = 5.$$

MỤC LỤC

	Trangg
CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	3
§1. Hàm số lượng giác	3
§2. Phương trình lượng giác cơ bản	7
§3. Một số phương trình lượng giác thường gặp	13
Ôn tập chương I	23
CHƯƠNG II. TỔ HỢP- XÁC XUẤT	35
§1. Quy tắc đếm	35
§2. Hoán vị- Chỉnh hợp- Tổ hợp	37
§3. Nhị thức Niu-tơn	40
§4. Phép thử và biến cố	43
§5. Xác suất của biến cố	47
Ôn tập chương II	52
CHƯƠNG III. DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN	58
§1. Phương pháp quy nạp toán học	58
§2. Dãy số	64
§3. Cấp số cộng	69
§4. Cấp số nhân	75
Ôn tập chương III	81
CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN	93
§1. Giới hạn của dãy số	93
§2. Giới hạn của hàm số	98
§3. Hàm số liên tục	105
Ôn tập chương IV	107
CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM	115
§1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm	115
§2. Quy tắc tính đạo hàm	120
§3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác	122
§4. Vi phân	127
§5. Đạo hàm cấp hai	130
Ôn tập chương V	134
ÔN TẬP CUỐI NĂM	143